Fractales y dinámica: imágenes en la matemática

Guillermo Sienra

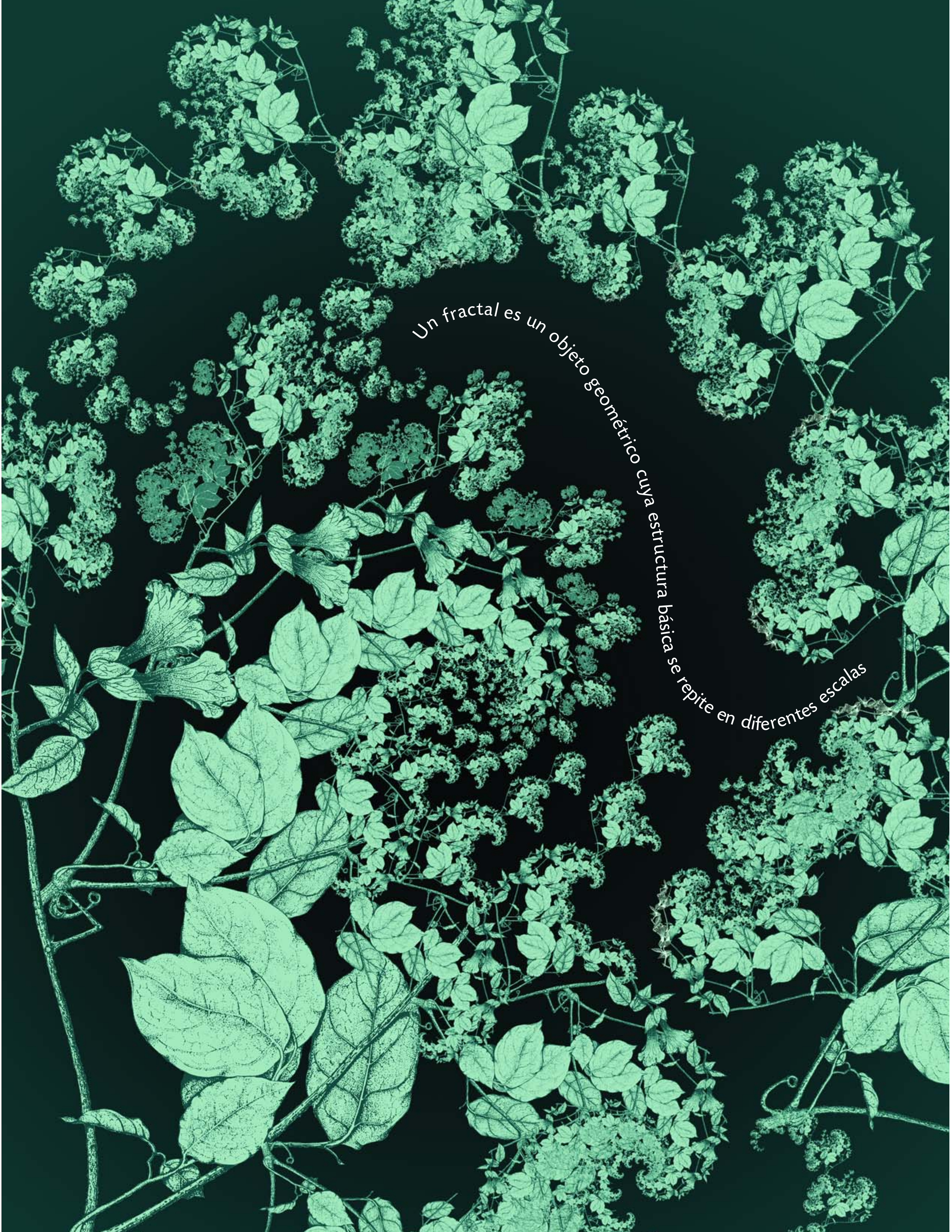
Un fractal es un objeto geométrico cuya complicada configuración se repite, al menos de manera aproximada, en diferentes escalas de magnitud. El término "fractal" fue propuesto por Benoît Mandelbrot en 1975 basado en el Latín *fractus*, que significa quebrado o fracturado. Muchas estructuras naturales son de tipo fractal. Los perfiles de las montañas, las líneas costeras, el sistema circulatorio de un vegetal o de un animal o los contornos de las nubes presentan configuraciones de tipo fractal.

Los fractales son demasiado irregulares para ser descritos en términos de la geometría euclidiana, pues poseen detalles característicos a cualquier escala de observación.

En este trabajo se analizan fractales producidos por algoritmos recursivos o repetitivos, llamados sistemas dinámicos y se muestran las imágenes que éstos generan.

Muchas de las imágenes matemáticas más enigmáticas y que más interés e influencia han tenido recientemente son generadas por lo que se conoce como sistemas dinámicos en el plano. Su belleza es un reflejo de las matemáticas que se esconden en su interior. La intención de este artículo es tratar de explicar de manera sencilla estos conceptos.

Históricamente los matemáticos franceses Gaston Julia (1893-1978) y Pierre J. L. Fatou (1878-1929) fueron los primeros en darse cuenta de estas cuestiones e iniciaron con sus trabajos pioneros el estudio dinámico que describiremos a continuación: una historia de estos descubrimientos se puede encontrar muy bien expuesta en Alexander (1994). Posteriormente a estos trabajos, publicados antes de 1930, no hubo un estudio específico de la teoría de estos sistemas hasta mediados de los setentas, pero desde entonces se han hecho muchas investigacio-


Un *fractal* es un objeto geométrico cuya estructura básica se repite en diferentes escalas

nes importantes. Diferentes ramas de las matemáticas tienen aplicaciones concretas en este campo, y se ha visto que muchos resultados de otras teorías ayudan a explicar esta situación.

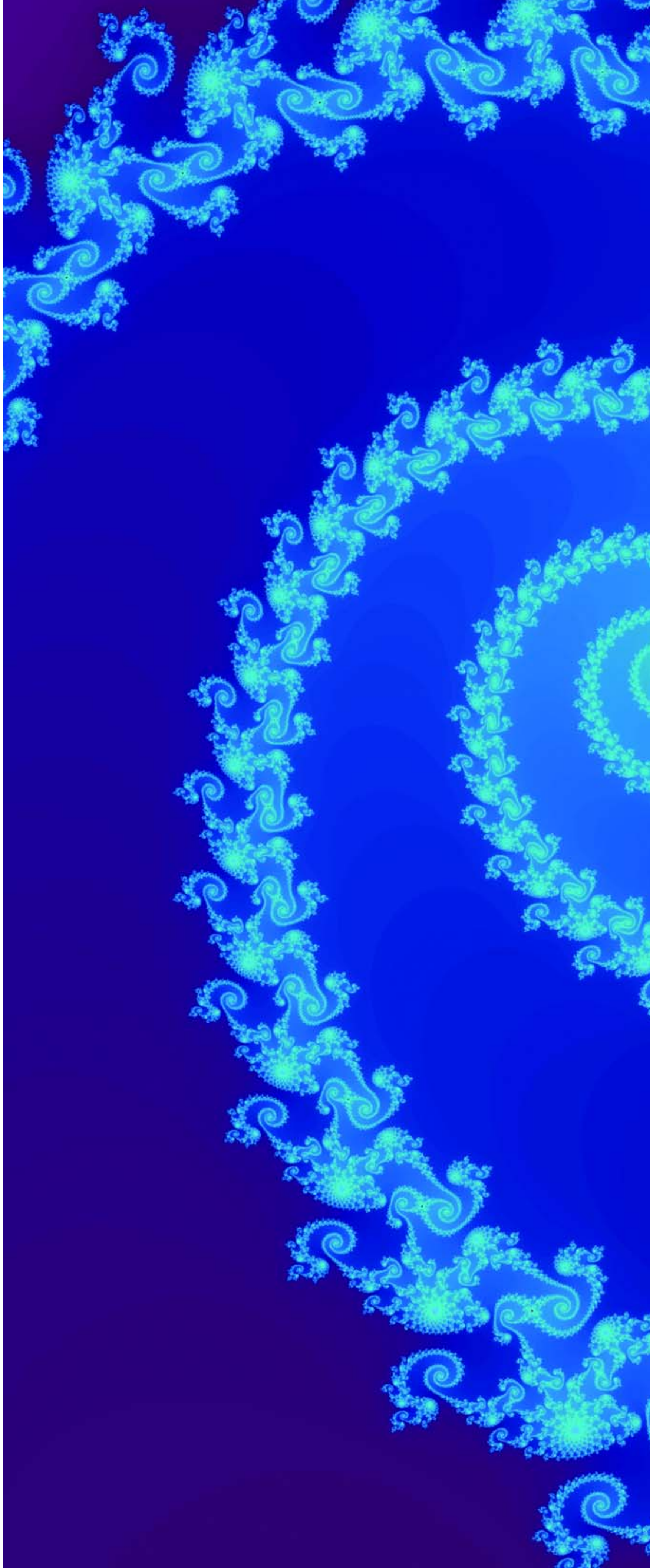
1.

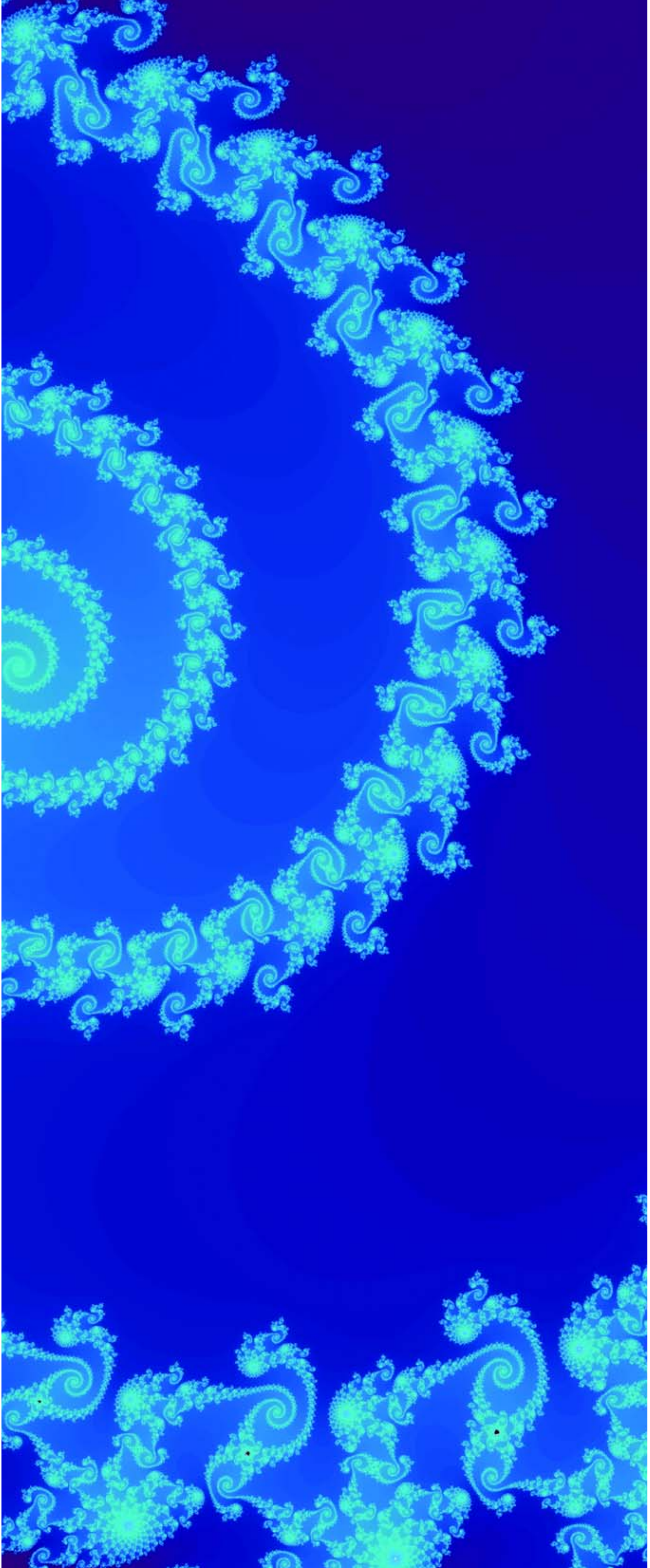
Sabemos que los puntos en un plano se escriben como parejas (x,y), donde las variables x y y son números reales. A los puntos del plano se les puede dar una estructura algebraica que permite multiplicar unos con otros y se define de la siguiente manera: a cada pareja (x,y) le asociamos un objeto de la forma $x + iy$, que los matemáticos conocen como número complejo. Cualesquiera dos números complejos $z = x_1 + iy_1$ y $w = x_2 + iy_2$, se pueden sumar y multiplicar de la siguiente forma: $z + w = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$, $zw = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2)$.

Denotemos por **C** al conjunto de todos los números complejos, con la suma y el producto que ya hemos descrito. El origen es el punto $0 = 0 + i0$.

Los números complejos también pueden describirse en términos de coordenadas polares: denotemos por $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ la distancia de z al origen. Si consideramos la igualdad conocida en los libros de números complejos: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$, entonces se puede ver que $z = x + iy = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, donde θ es el ángulo entre el eje real y el vector z. En algunos casos usaremos la notación $\exp(w)$ en lugar de e^w.

Definamos ahora un *sistema dinámico en* **C**. Para ello es necesario considerar una función $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Aquí cabe mencionar que se distinguen diferentes categorías según las propiedades de la función f; por ejemplo si es continua, diferenciable u holomorfa. En cada caso las propiedades dinámicas generales serán específicas a su categoría. Entonces la composición $f \circ f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, que se obtiene aplicando nuevamente la función f al resultado $f(z)$, es también una función. Así sucesivamente, cual-





quier composición $f \circ f \circ \ldots \circ f$ es una función del plano en el plano y denotaremos por f^n a la composición de f, n veces.

El problema ahora es el siguiente: si se tiene $z \in \mathbf{C}$, determinar los puntos $f(z)$, $f^2(z), \ldots, f^n(z), \ldots$ Este conjunto de puntos en el plano se llama *la órbita* del punto z, y la denotamos por $o(z)$.

Si $o(z)$ resulta un conjunto finito con k elementos, decimos que z es un punto periódico. Decimos que z es un punto de periodo m si m es el número más pequeño tal que $f^m(z) = z$. Más aún, si k=1, decimos que z es un punto fijo, es decir, $f(z)=z$.

Los puntos de $o(z)$ pueden tender o no a infinito. Si no tienden a infinito decimos que la órbita $o(z)$ es *acotada*.

2.

En este momento necesitamos un ejemplo. Consideremos para ello la función $f(z) = z^2$. Si queremos saber cuáles son los puntos fijos de la dinámica de f, tenemos que resolver la ecuación $f(z) = z$. Esto es $z^2 = z$, lo que implica que $z^2 - z = 0$ y por lo tanto $z = 0$ y 1.

Si queremos encontrar puntos de periodo dos, tenemos que resolver la ecuación $f(f(z)) = z$, esto es $z^4 = z$, es decir $z(z^3-1)=0$, lo que implica $z = 0$ (que es punto fijo) o bien $z_k = \exp(2\pi ik/3)$, $k = 0,1,2$, en descripción polar. Para $k = 0$ tenemos $z_0 = 1$, que también es punto fijo, pero además tenemos que $f(z_1) = z_2$ y $f(z_2) = z_1$. Por lo que z_1 y z_2 son puntos de periodo 2.

En general, si queremos determinar puntos de periodo n, tenemos que resolver la ecuación $z^{2^n} = z$, es decir $z(z^{2^n-1} - 1) = 0$. Entonces $z = 0$ o $z = \exp(2\pi ik/2^n-1)$. Y se hace un análisis como el que se hizo en el párrafo de arriba para determinar los puntos que son exactamente de periodo n. Una observación importante es que todos estos puntos periódicos tienen distancia al origen igual a 1, y sobre todo son densos en el círculo de todos los complejos de norma uno. Esto es, entre cualesquiera dos de ellos siempre hay otro en medio.

También podemos observar que si $|z| < 1$, entonces $|f(z)| < |z|$, por lo que sucesivamente tendremos que $|f^n(z)|$ tiende a 0 si n tiende a infinito, y por tanto $o(z)$ es acotada. Lo opuesto sucede si $|z| > 1$, ya que en este caso resulta que $|f^n(z)|$ tiende a infinito cuando n tiende a infinito; entonces, $o(z)$ es no acotada. Obsérvese que en la frontera de los acotados está el círculo de los complejos de norma igual a 1, y tienen también su órbita acotada.

La dualidad que hemos expuesto nos permite crear nuestra primera figura de la siguiente forma: pintemos de negro los puntos z para los cuales $o(z)$ es acotada y de blanco los z tales que $o(z)$ no es acotada.

Nuestra figura es entonces un disco negro (de radio 1) sobre fondo blanco.

Notemos que los puntos en el círculo unitario son *expansivos*, en el sentido de que para cualquier punto del círculo unitario, hay puntos tan cercanos a él como se quiera, y tal que $o(w)$ tiende a 0 o a ∞.

3.

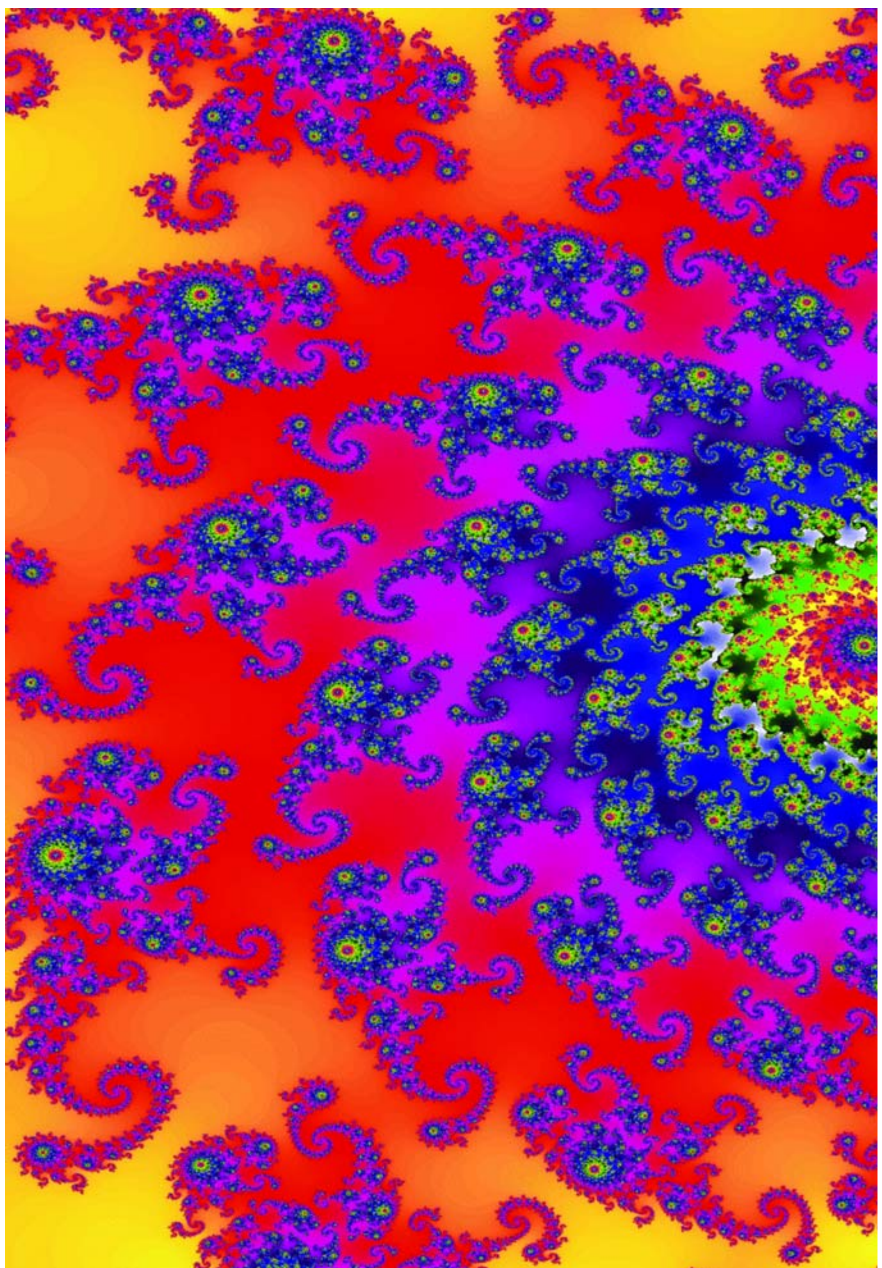
Lo más natural es generalizar ahora el ejemplo anterior, que es un polinomio cuadrático en la variable z. Por ello nos conviene pensar en las funciones del tipo $f_c(z) = z^2 + c$, donde c es cualquier número complejo.

Para cualquier $z \in \mathbf{C}$, tenemos que su órbita bajo la función f_c es $z \to z^2 + c \to (z^2 + c)^2 + c \to ((z^2 + c)^2 + c)^2 + c \to \ldots$ El lector notará que tratar de encontrar puntos periódicos es en general muy difícil. Sin embargo aquí las computadoras nos sirven de laboratorio. Para este fin, fijemos un complejo c y digámosle a la computadora que pinte de negro los puntos cuyas órbitas son acotadas y de blanco aquellas que no lo son.

Si $c = 0.25$, veremos la Figura 1; para $c = -0.7 + 2i$, veremos la Figura 3. Estas figuras describen la dualidad de la que hemos estado hablando.

El conjunto de puntos cuya órbita bajo f_c no se va a infinito se le llama el *conjunto de Julia lleno* de f_c. A los puntos que están en el borde de este conjunto se les llama simplemente el *conjunto de Julia* de f_c y se denota por $J(f_c)$. Al complemento del conjunto de Julia se le llama el *conjunto de Fatou*.

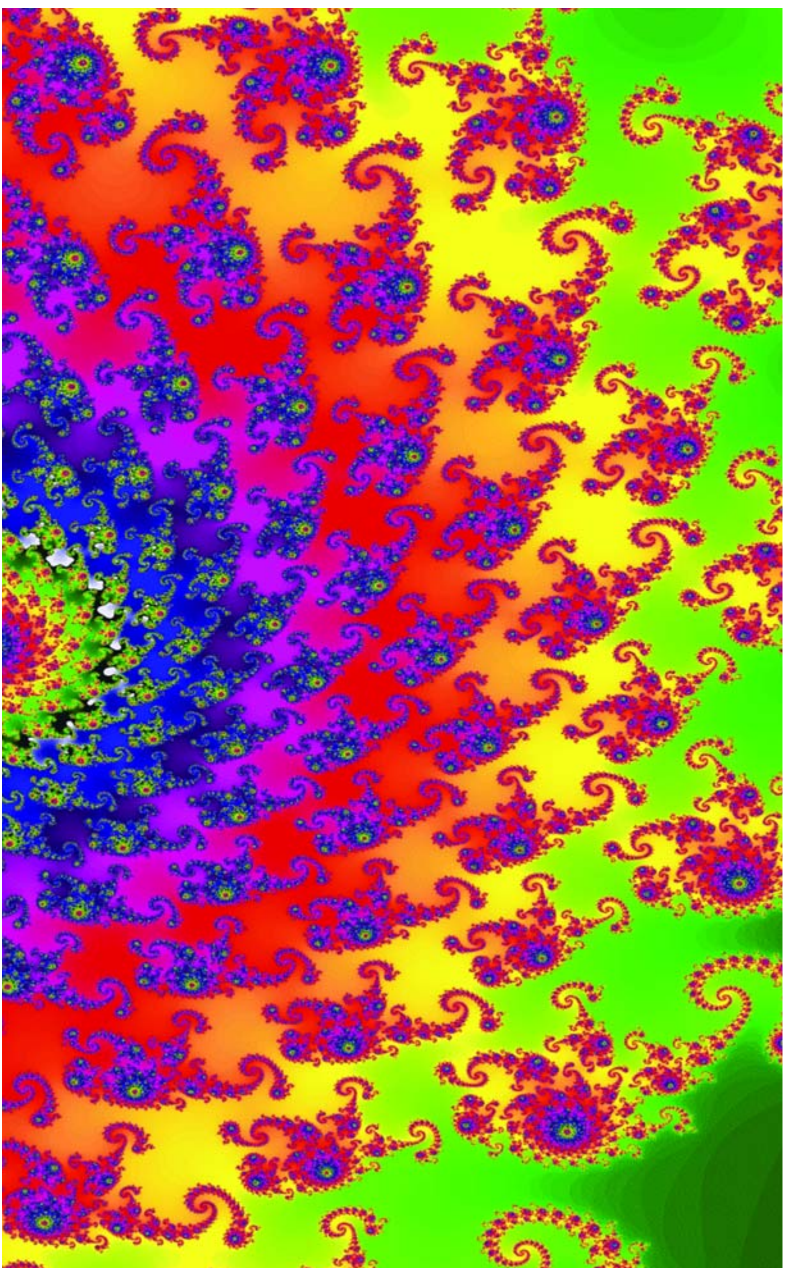
Estas figuras matemáticas que tienen bordes "corrugados" reciben el nombre genérico de *fractales*. Podemos decir que un fractal es un objeto geométrico cuya estructura básica se repite en diferentes escalas. En muchos casos, como el nuestro, los fractales pueden ser generados por un proceso recursivo o iterativo (repetición de los mismos pasos) capaz de producir estructuras autosimilares independientemente de la escala específica. Los fractales son estructuras geométricas que combinan irregularidad y estructura. Según algunos expertos, contribuyen con una nueva manera de modelar la naturaleza o inclusive per-



miten abordar problemas en ciencias sociales (véase Clarke, 2004; Mandelbrot, 2004 y Peitgen, 1989).

4.

Pero, ¿qué información sobre la dinámica de f_c nos dan estas figuras? Sabemos que si escogemos z en la parte negra, cada punto en su órbita permanece en la parte negra; si escogemos en la parte que no es negra, entonces toda su órbita está en la parte que no es negra y, más aún, los puntos de su órbita tienden al infinito. También se sabe que las iteraciones de puntos en el conjunto de Julia permanecen en el conjunto de Julia. Y es un resultado de la teoría que los puntos periódicos expansivos son siempre densos en el conjunto de Julia;



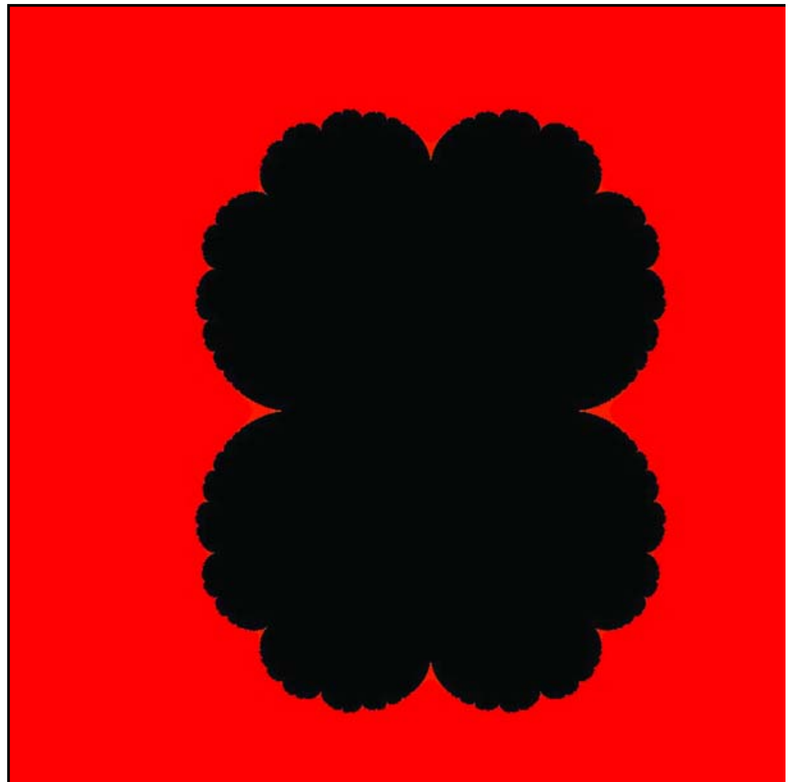


Figura 1.

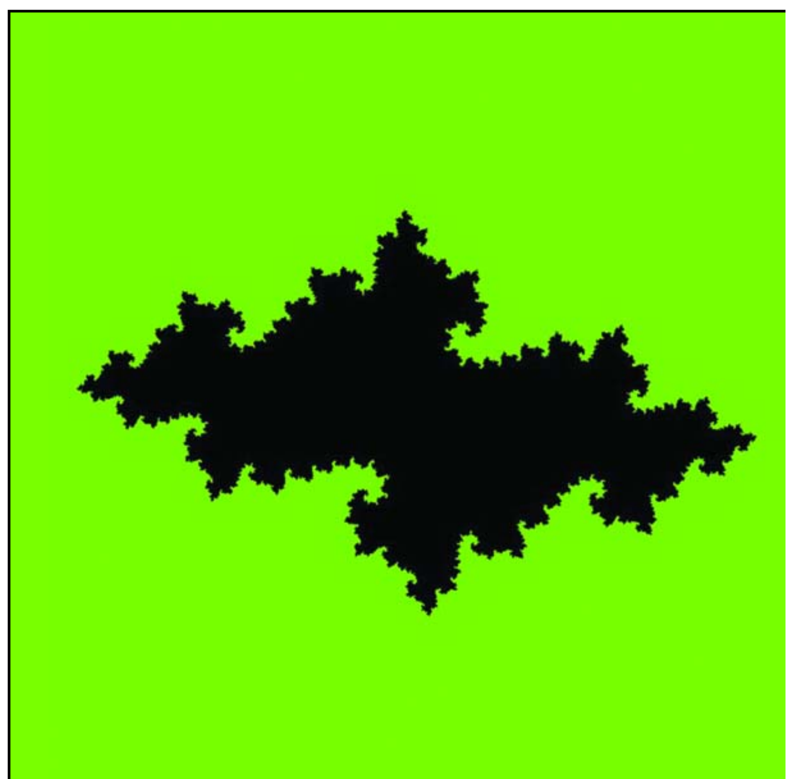


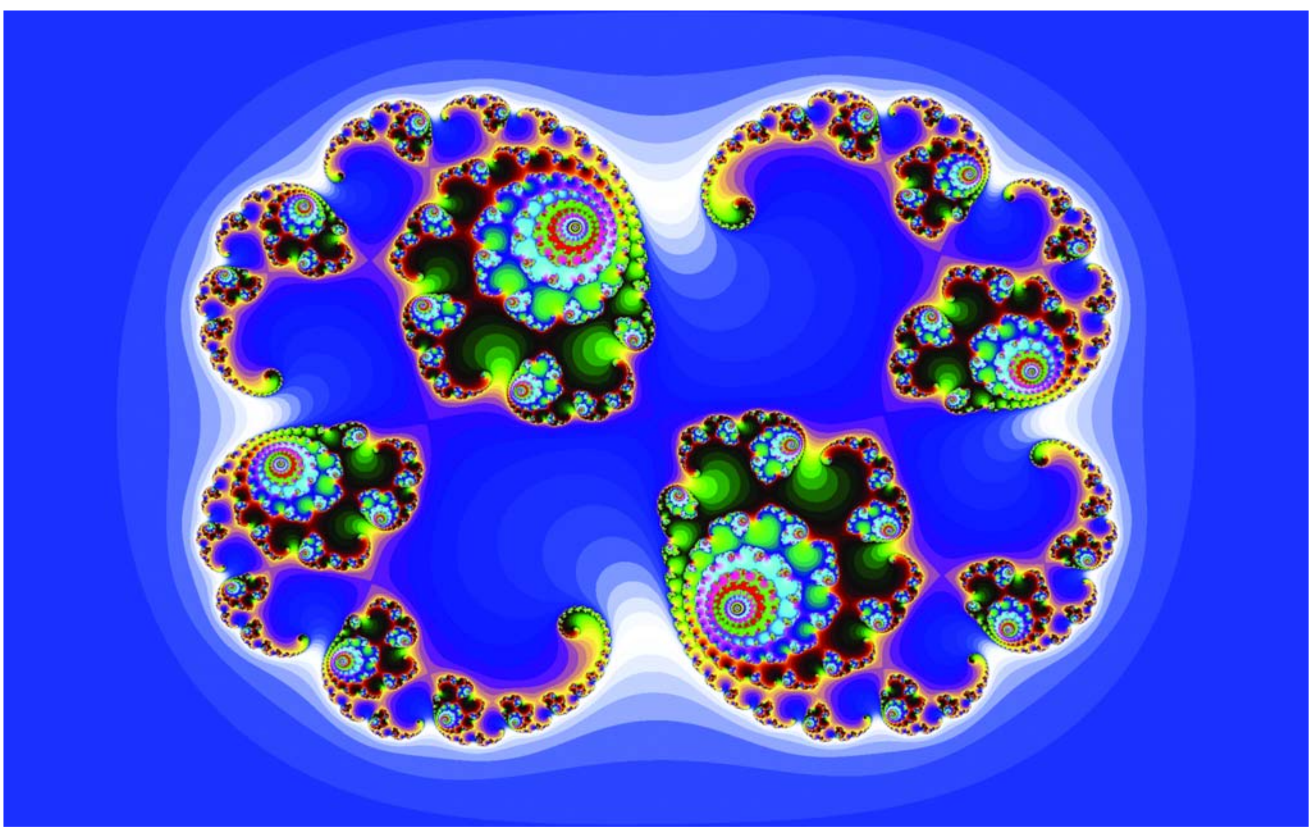
Figura 2.

como en el ejemplo que vimos de $f(z) = z^2$. El lector interesado en las demostraciones de estos resultados puede consultar Milnor (2006).

De lo expuesto anteriormente se deduce que los puntos en el conjunto de Julia tienen la propiedad de que hay puntos vecinos tan cercanos a él como se quiera, de forma que las órbitas de estos puntos tienden a lugares muy diferentes. Los matemáticos dicen entonces, que el conjunto de Julia es *caótico*. El de caos es un concepto que se ha colado en casi todas las ramas del conocimiento, y está indisolublemente ligado a los fractales.

5.

Notemos que si $f(z) = z^2 + c$, entonces al calcular su derivada obtenemos que $f'(z) = 2z$, y si la evaluamos en el origen, obtenemos $f'(0) = 0$. Es decir, el origen es un punto crítico de la función, y esto se traduce diciendo que la función no es biyectiva ni conserva ángulos en una vecindad del 0. Además, es al único punto del plano al que le pasa esto. Lo anterior quiere decir, entonces, que tenemos un punto especial.



Definiremos ahora el famoso conjunto de Mandelbrot. Este conjunto está contenido en el plano y clasifica la dinámica de las funciones f_c. Un punto c pertenece al conjunto de Mandelbrot si la órbita del cero no tiende a infinito al aplicarle la función f_c. En la Figura 4 hemos plasmado el resultado de este algoritmo, y el objeto en negro es precisamente este conjunto.

Los pioneros en la investigación del conjunto de Mandelbrot fueron Douady y Hubbard, quienes a principios de los ochentas demostraron que es un conjunto *conexo*; es decir, no está separado en pedazos.

Un resultado importante de sus trabajos es que si un punto c está en el conjunto de Mandelbrot, entonces el conjunto de Julia $J(f_c)$ es conexo, y si no, $J(f_c)$ está formado por un conjunto inconexo de puntos. Por ejemplo, en las funciones que escogimos en la sección 3 tenemos primero que $c = 0.25$; de la Figura 1 vemos que su conjunto de Julia $J(f_{.25})$ es conexo, y por tanto 0.25 está en el conjunto de Mandelbrot. Similarmente, el complejo i está en este conjunto. Sin embargo, el complejo $-0.766 + 0.15i$ no lo está, como lo indica la Figura 3.

De hecho el punto $c = 0$ está dentro de la llamada *cardioide* del conjunto de Mandelbrot, y el punto $c = 0.25$ está en el vértice. En general, si tomamos cualquier punto dentro de la cardioide o en su frontera, se tiene que el conjunto de Julia de la función f_c es una deformación del círculo. Por ejemplo, esto ocurre en la Figura 2, donde $c = 0.7 + 0.2i$.

En las Figuras 5 y 6 tenemos acercamientos y detalles de conjuntos de Julia correspondientes a $c = -1.152 + 0.2695i$, $-1,417 + 0i$, respectivamente. Ambos están en el conjunto de Mandelbrot.

Las Figuras 7 a 11 son detalles del conjunto de Mandelbrot. De la figura 7 a 9 tenemos los aumentos sucesivos de la región central. Es la región que se conoce como "duplicación de periodo". Se ha descubierto que esta cascada de duplicaciones es común en fenómenos dinámicos, y es una ruta al caos en dinámica de variable real. El estudio de esta cascada llevó al físico Feigenbaum a establecer su constante universal (véase Clarke, 2004).

La Figura 12 es el *tricornio*, descubierto por J. Milnor, y es el equivalente al conjunto de Mandelbrot, de la familia $f_c(z) = conj(z) + c$; donde $conj(z) = x - yi$ es el conjugado de $z = x + yi$.

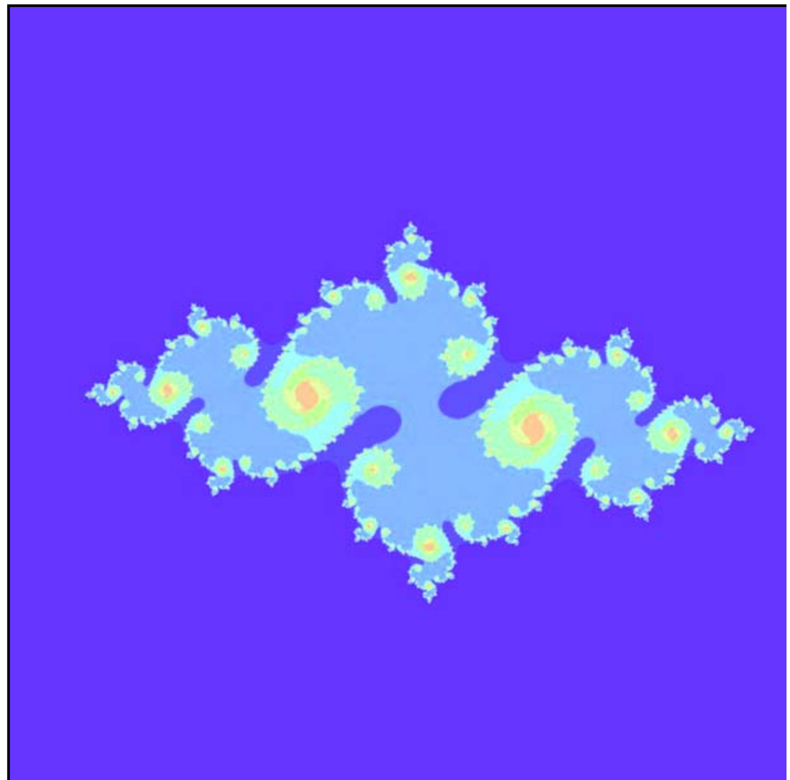


Figura 3.

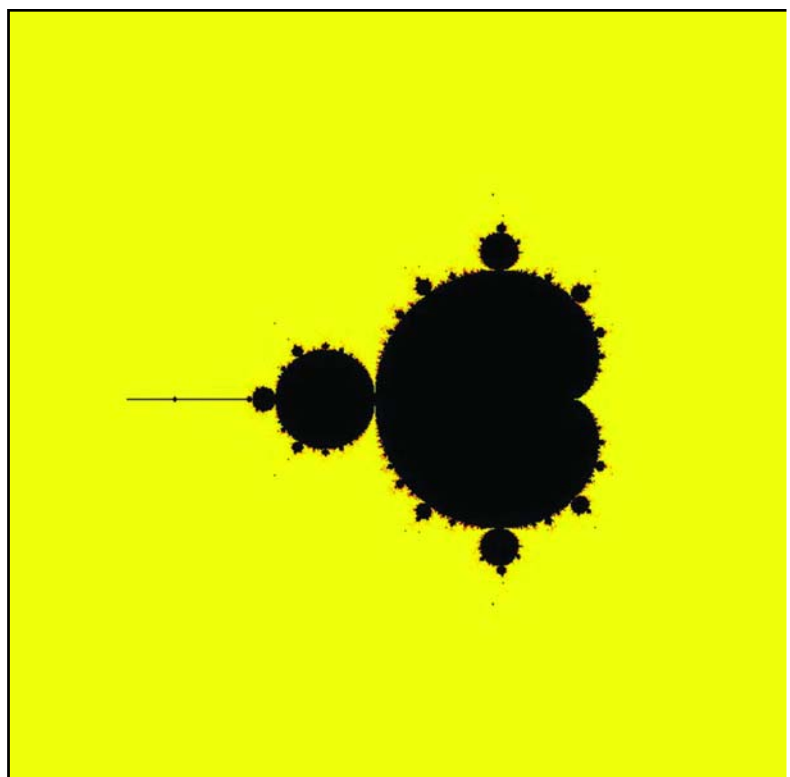


Figura 4.

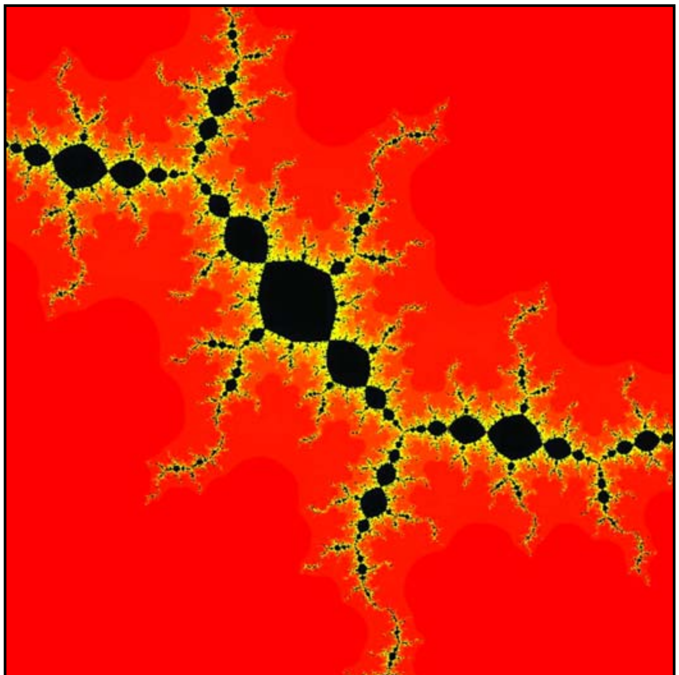


Figura 5.

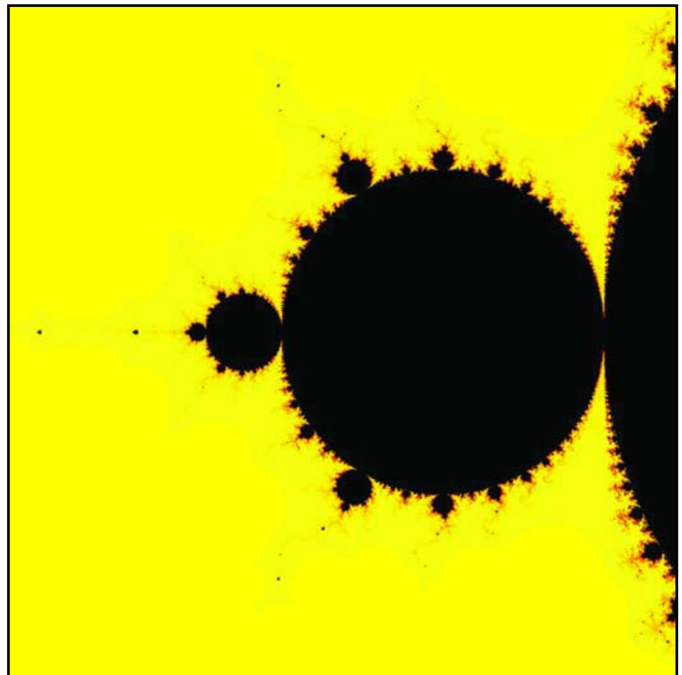


Figura 7.

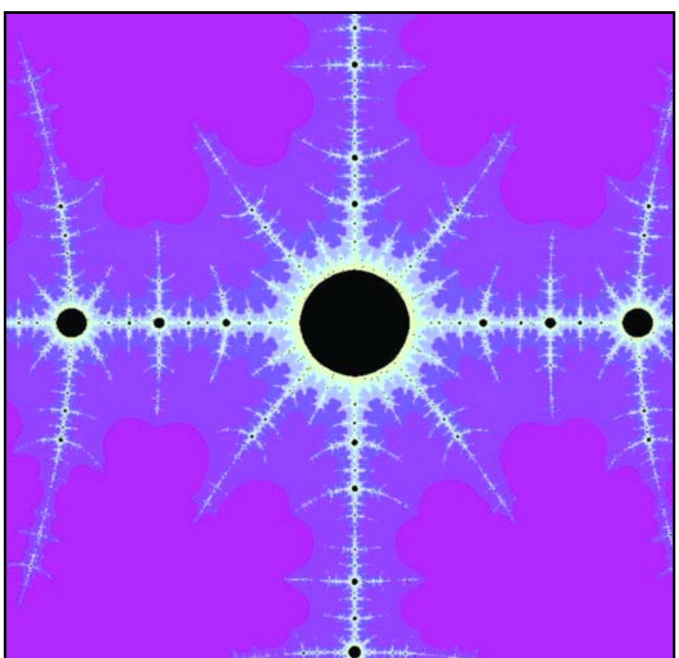


Figura 6.

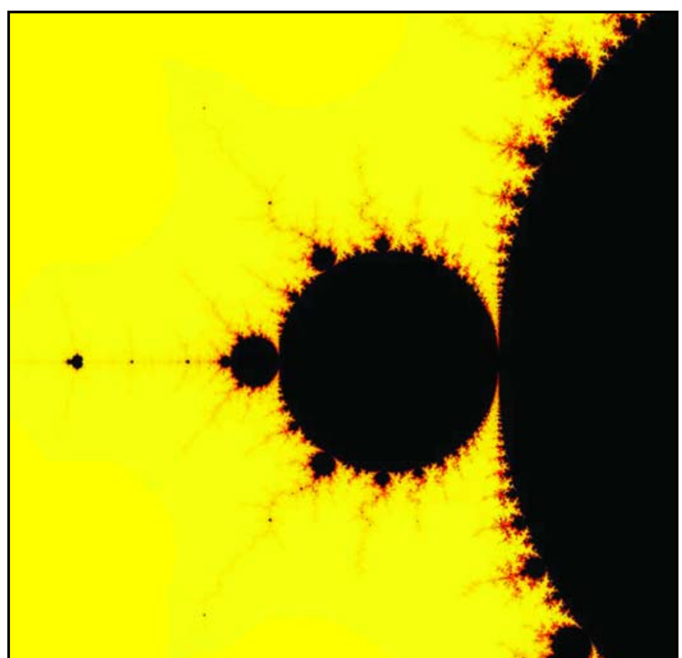


Figura 8.

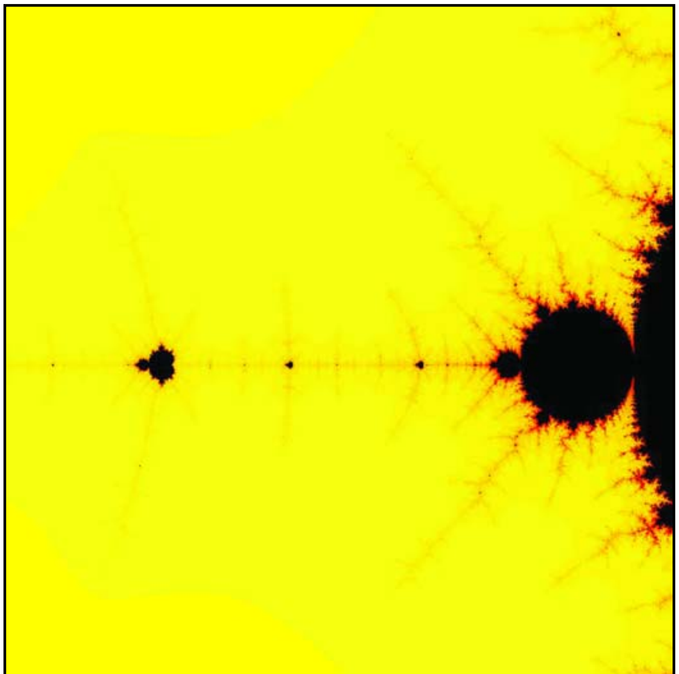


Figura 9.

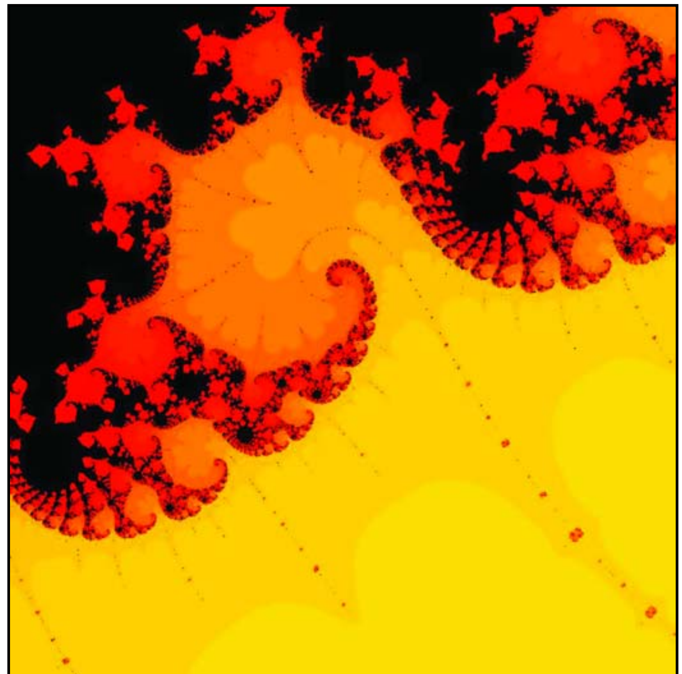


Figura 11.

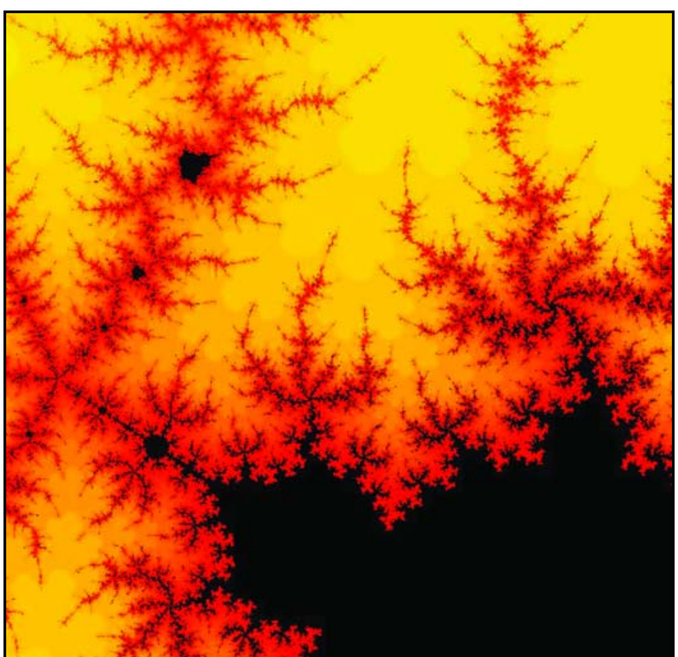


Figura 10.

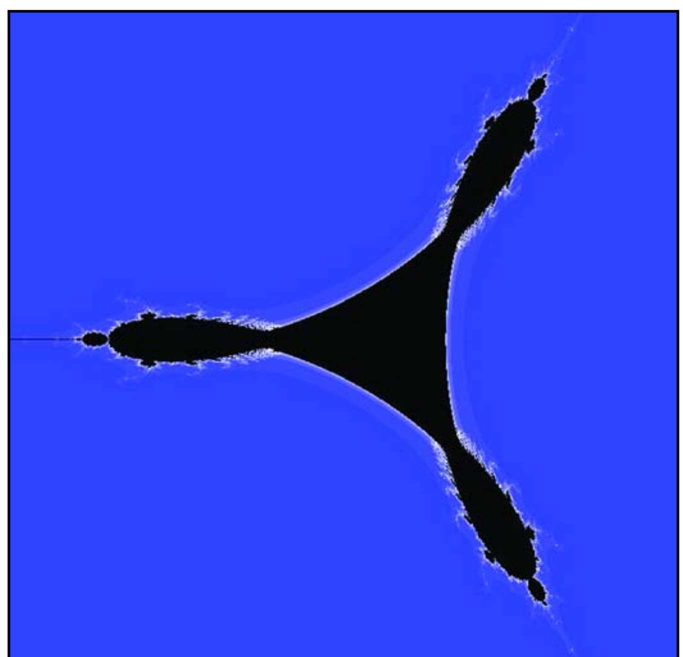


Figura 12.

Otras funciones generan también conjuntos de Julia u otros conjuntos fractales.

Las figuras numeradas de este artículo han sido generadas con el programa FRACTAL del Laboratorio de Dinámica no Lineal, en una versión de Ramón Ramírez Guzmán.

Guillermo Sienra tiene un doctorado en la especialidad de Sistemas Dinámicos por la Universidad de Southampton (Inglaterra) y actualmente trabaja en el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM. Su investigación actual versa sobre dinámica holomorfa y geometría.
gsl@dinamica1.fciencias.unam.mx

Bibliografía

Alexander, D. S. (1994), *A history of complex dynamics: From Schruder to Fatou and Julia*, Braunschweig.

Clarke, A. C. (2004), "The colours of infinity", en A. A. V.V., *The beauty and power of fractals*, Clear Press.

Devaney, R. (1985), *An introduction to chaotic dynamical systems*, 3a ed., Addison–Wesley.

Mandelbrot, B. (2004), *Fractals and chaos*, Springer Verlag.

Milnor, J. (2006), *Dynamics in one complex variable*, 3a. ed., Princeton University Press.

Peitgen, H. O. (1989), "Fantastic deterministic fractals", en Peitgen y Saupe (editores), *The science of fractal images*, Springer.