Experiencias desconcertantes en un mundo que reta a nuestros sentidos: Hiperbolia

Michael Barot

Hiperbolia es un mundo en el que la geometría no es euclidiana. Al no cumplirse el quinto postulado de Euclides, al pasear en esta misteriosa ciudad ocurren insólitos fenómenos. Éstos cobran mayor relevancia ante la posibilidad de que nuestro universo no sea euclidiano, sino hiperbólico.

Hiperbolia es un conjunto de ciudades construidas en la geometría hiperbólica. En Hiperbolia podemos tener experiencias poco comunes que rebasan nuestra percepción de la realidad, como por ejemplo edificios rectos y altos cuyos pisos superiores rebasan por mucho en área a la planta baja, o "cuadrados" que poseen cinco ángulos rectos en su interior. En este trabajo se presenta un proyecto de visualización tridimensional (3D) de geometría hiperbólica. Lo encontrado cobra mucha mayor relevancia por el hecho de que nuestro universo podría ser hiperbólico.

La importancia del descubrimiento

La *geometría hiperbólica* es una de las que hoy en día se estudian en matemáticas. Hace 300 años no había más que una geometría: la *euclidiana*, y se pensaba que al estudiarla se estudiaba también el espacio que nos rodea. El descubrimiento de la geometría hiperbólica por Nicolai Lobachevski en 1826 –y, de manera independiente, cinco años más tarde, por Janós Bolyai– puso fin a esta unidad entre la geometría y nuestro espacio.

Carl-Friedrich Gauss midió la suma de los tres ángulos internos de un triángulo durante el levantamiento topográfico de la región de Hanóver, del cual estaba a cargo, con el afán de decidir cuál de las geometrías era la de nuestro mundo. Si


UNAM
Instituto de Matemáticas

la suma resultaba menor que 180°, nuestro espacio sería hiperbólico; si era exactamente 180° sería euclidiano; y si era mayor que 180°, entonces el espacio debería poseer una geometría elíptica. La medición arrojó una suma de ángulos tan cercana a 180° que, por los márgenes de error, no se podía concluir nada en absoluto. Con ello, la matemática se separó de la física para siempre. Einstein formuló esta separación con las siguientes palabras: "En la medida en que las proposiciones de la matemática se refieran a la realidad, no son seguras; en la medida en que sean seguras, no se refieren a la realidad."

El método axiomático

Regresemos a la geometría euclidiana. Se estudió en Grecia en la antigüedad durante 600 años, desde que Tales formuló los primeros *teoremas*; es decir, afirmaciones que son ciertas en gran generalidad. Alrededor de 300 antes de nuestra era el matemático Euclides trabajó en Alejandría en una recopilación del conocimiento geométrico de la época, que ahora se conoce como *Los elementos*.

Lo sorprendente no es que Euclides lograse reunir la mayoría de los resultados hasta entonces conocidos, sino la *forma* en que lo hizo. Euclides basó todo en las siguientes cinco afirmaciones básicas, que llamó *postulados* (más tarde se llamaron también axiomas):

1. Se puede trazar una línea recta de cualquier punto a cualquier otro punto.
2. Se puede prolongar cualquier línea recta acotada de manera continua.
3. Se puede trazar un círculo con cualquier centro y cualquier radio.
4. Dos ángulos rectos cualesquiera son iguales.
5. Si una línea recta, al intersecar dos líneas rectas, hace que los ángulos interiores del mismo lado sean menos que dos ángulos rectos, entonces las dos líneas rectas se intersecan al prolongarse, y esto sucede del lado en el que se encuentran los dos ángulos interiores que son menos que dos ángulos rectos (véase la Figura 1).

Todos los demás resultados en *Los elementos* fueron deducidos, mediante la lógica, a partir de estos cinco axiomas. Éste es el método que hizo famoso a Euclides, a pesar de que no existió ningún testigo contemporáneo que hiciera un recuento de su vida.

El quinto axioma

El segundo axioma indica que para Euclides el concepto "línea recta" designaba un objeto finito, lo que hoy llamaríamos "segmento". Los primeros cuatro axiomas son bastante intuitivos, cortos y fáciles de entender. Pero el quinto axioma es diferente: es largo y no tan intuitivo. Parece que a Euclides no le gustaba mucho el quinto axioma: de todos los resultados que se demuestran en *Los elementos*, no se usa el quinto axioma hasta la vigésima novena proposición. Todas las afirmaciones anteriores se demuestran sin hacer uso del quinto axioma.

En el método axiomático lo deseable es que se formule el menor número posible de axiomas. No tiene sentido formular un axioma si éste se puede deducir de los otros. En ese caso, sería mejor ponerlo como *proposición*, es decir, como un resultado, una consecuencia de los otros axiomas. En caso de que ninguno de los axiomas se pueda deducir de los demás, se dice que son *independientes*.

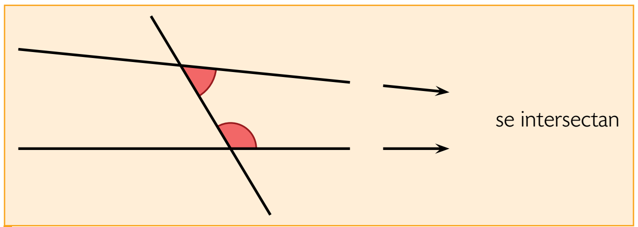

Figura 1. El 5º postulado de Euclides.

Por el carácter del quinto axioma, no debe sorprender que muchos lectores de *Los elementos* trataran de deducirlo de los primeros cuatro. La lista de los que lo han intentado es larga, pero aun el esfuerzo de todos ellos durante los 2 000 años posteriores a Euclides no arrojó un argumento que perdurara: tarde o temprano se encontraba un error en cada uno de los intentos. En 1763, G. S. Klügel reunió todos los intentos que pudo encontrar y demostró que en cada uno había un error de argumentación.

Más o menos 50 años después, dos matemáticos, independientemente uno del otro, se preguntaron algo completamente nuevo: ¿Qué tal que no haya ninguna contradicción al suponer la afirmación *opuesta* a la del quinto axioma? Si en efecto el quinto axioma es independiente de los demás, entonces sería posible formular una geometría diferente a la euclidiana. Esas dos personas fueron Nicolai Lobachevski y Janós Bolyai. Sus escritos, publicados de manera independiente en 1826 y 1831, respectivamente, no fueron bien recibidos por la comunidad matemática, y no fue sino hasta 50 años después cuando Eugenio Beltrami, Felix Klein y Henri Poincaré propusieron modelos que muestran esas geometrías. Con ello quedó establecido de manera contundente que el quinto axioma realmente es independiente de los primeros cuatro.

Ante este desarrollo, le debemos aún más respeto a Euclides, pues ya 2 000 años antes fue tan autocrítico como para no caer en ninguna trampa de argumentación y rendirse a aceptar la necesidad del quinto axioma.

Presentación de un modelo

El modelo que presentamos aquí aparece por primera vez en un texto de Beltrami, aunque ahora se conoce bajo el nombre de *semiplano de Poincaré*. El modelo se basa en la geometría euclidiana, es decir, en los puntos, las rectas, los ángulos y otros objetos de la geometría hiperbólica que se describirán como ciertos *objetos euclidianos*. Para no confundirnos, indicaremos la pertenencia de un objeto a alguna de las geometrías con un prefijo: un e-punto será un punto de un plano euclidiano, mientras que un h-punto será un punto de la geometría hiperbólica, etcétera.

Ahora bien, para describir el *semiplano de Poincaré* fijamos un e-plano y en él una e-recta ω que –para facilitar– la tomamos horizontal.

Los h-puntos son los e-puntos que se encuentran "arriba" de ω; es decir, los puntos del semiplano superior determinado por ω.

Los e-puntos de ω no son h-puntos; es decir, quedan excluidos del semiplano de Poincaré. Las h-rectas son tanto e-semirrectas como e-semicircunferencias que inciden en ω formando un e-ángulo recto; es decir, que son e-perpendiculares a ω. Los h-ángulos se miden –usando e-tangentes– como los e-ángulos. La Figura 2 muestra tres h-rectas: *l*, *g* y *h*. Dos de las cuales se intersecan en el h-punto *P* formando el h-ángulo α –la e-tangente a *h* en el punto *P* es la línea punteada. La h-recta *l* es paralela a *g* y también lo es a *h*.

Puede parecer raro que un e-objeto curvo pueda representar algo recto en otra geometría. Pero el método axiomático lo permite: los objetos no se describen más que por las propiedades que se establecen en los axiomas. David Hilbert decía que en vez de decir "puntos", "rectas" y "planos", igualmente se podría decir "mesas", "sillas" y "tarros de cerveza", expresando de esta manera que en la geometría axiomática no importa cómo llamamos a los objetos, sino que éstos cumplan las condiciones establecidas.

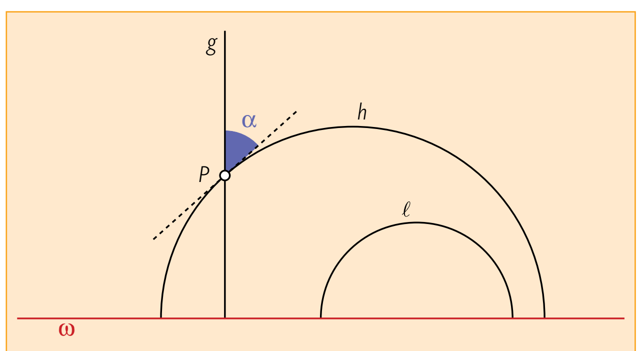

Figura 2. El semiplano de Poincaré.

No diremos nada sobre la h-distancia, no porque ésta no sea importante, sino porque la definición se basa en una fórmula que poco nos ayudaría a entender las propiedades de esta nueva geometría extraña que es la hiperbólica. En vez de definir la h-distancia, indicaremos cómo se h-refleja en una h-recta dada. La h-reflexión nos permitirá mover todo el h-plano sin cambiar las h-distancias y esto será suficiente para lo que necesitaremos.

La h-reflexión

De la h-reflexión ρ_g en la h-recta g esperamos que tenga, al menos, las siguientes propiedades:

i) ρ_g intercambia los dos lados de g;
ii) ρ_g fija los puntos de g;
iii) ρ_g manda h-rectas en h-rectas; y
iv) ρ_g conserva h-ángulos o, más precisamente, ρ_g invierte h-ángulos orientados.

Si queremos que ρ_g tenga todas estas propiedades, entonces sólo hay una posibilidad para la h-reflexión, como lo muestra la siguiente argumentación. Por la propiedad (ii), los h-puntos de g se fijan. Si P es un h-punto que yace fuera de g, entonces elegimos dos h-puntos A y B de g. Por la propiedad (iii), la h-recta $a = PA$ se h-refleja en la h-recta $a^* = P^*A$, mientras que la h-recta $b = PB$ se h-refleja en la h-recta $b^* = P^*B$. Por la propiedad (iv), el h-ángulo $\alpha = <PAB$ es igual al ángulo $<P^*AB$, pero invertido en su orientación, y $\beta = <PBA$ es igual al ángulo $<P^*BA$, también invertido en su orientación. Esto fija las h-rectas a^* y b^*, y el h-punto P^* es su intersección. La Figura 3 muestra la situación.

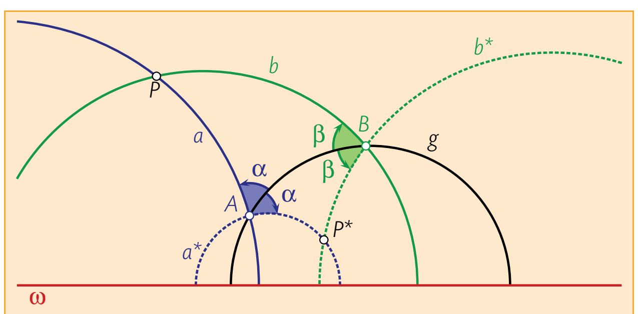

Figura 3. La h-reflexión.

El hecho de que la h-reflexión quede determinada por las propiedades mínimas (i)-(iv) no es un hecho particular del modelo del *semiplano de Poincaré*, sino que es válido en cualquier geometría. Lo que es particular de ésta es que la h-reflexión es una operación que se conoce en el mundo euclidiano: es la *inversión en una circunferencia*. Si e es un e-círculo con centro M y radio r, entonces la inversión en e lleva un punto P al punto P^*, que está determinado por la propiedad que P^* yace sobre el e-rayo que empieza en M, pasa por P y la e-distancia $|MP^*|_e$ es tal que $|MP|_e \cdot |MP^*|_e = r^2$.

Hasta aquí sólo hemos considerado el caso en el que la h-recta g es una e-semicircunferencia. En el caso en el que g es una e-semirrecta, la h-reflexión es exactamente la e-reflexión.

Circunferencias y equidistantes

Equipados con la herramienta de la h-reflexión es fácil averiguar qué es una h-circunferencia en el modelo del *semiplano de Poincaré*. Claro, la h-circunferencia con h-centro C que pasa por un h-punto P consta de *todos* los h-puntos Q que están a la misma h-distancia de C que P. No sabemos medir la h-distancia pero podemos h-reflejar el h-punto P en diferentes h-rectas que pasan por C. Con ello obtenemos varios h-puntos Q_1, Q_2, … que están en la h-circunferencia buscada. La Figura 4 muestra cuatro h-reflexiones. La e-curva que se obtiene, si se h-refleja P en todas las h-rectas que pasan por C, es una e-circunferencia. Pero el h-centro C de la h-circunferencia no es su e-centro. El primero está más e-cerca de ω que el otro.

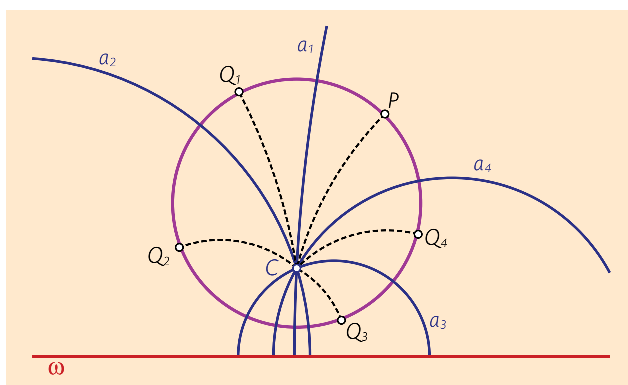

Figura 4. La h-circunferencia.

La misma idea que usamos para averiguar la e-naturaleza de la h-circunferencia la podemos usar para investigar en qué consiste la e-curva de todos los h-puntos que están a la misma h-distancia de una h-recta *l* dada. En la geometría euclidiana esta curva es una e-recta paralela a *l*, pero en la geometría hiperbólica no es así. La Figura 5 muestra varias *equidistantes*, nombre que reciben estas curvas en la geometría hiperbólica. Esta figura muestra claramente que las equidistantes no son h-rectas, pues no inciden en ω de manera perpendicular. La h-distancia entre dos de estas equidistantes es siempre la misma; es decir,

$$|PQ|_h = |QR|_h = |RS|_h = |ST|_h.$$

Debe observarse que la perpendicular a la recta *l* también es perpendicular a cada una de las equidistantes a *l*.

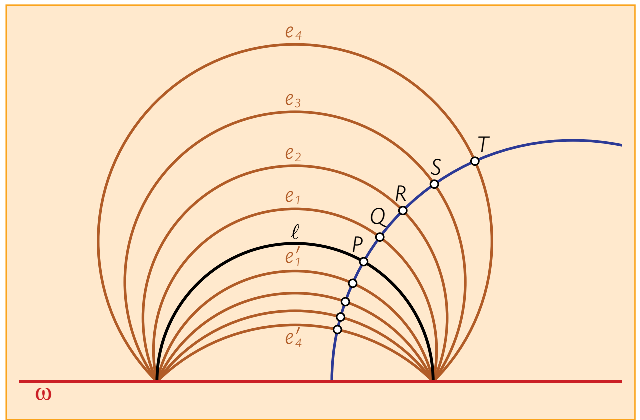

Figura 5. Equidistantes a una **h**-recta.

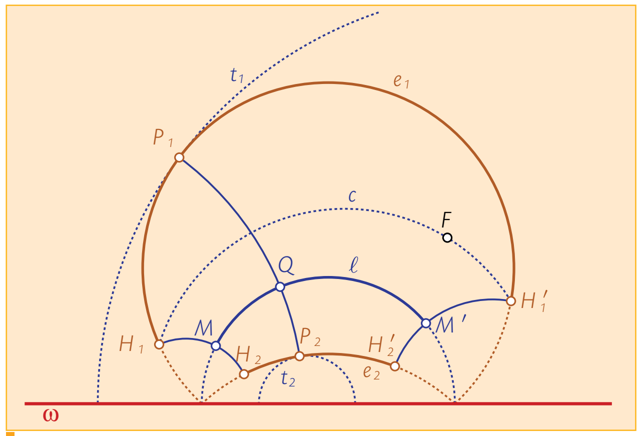

Figura 6. **h**-líneas del campo gravitacional.

¿Cómo vivir en Hiperbolia?

Hiperbolia es el análogo tridimensional de la geometría hiperbólica plana de la que hemos estado hablando: los h-puntos son los e-puntos que se encuentran "arriba" de un e-plano (horizontal) ω. Los h-planos son los e-hemisferios y los e-semiplanos que inciden en ω de manera perpendicular. En otras palabras los h-planos son una especie de "burbujas" (o cúpulas) pegadas a ω.

Consideremos una h-Tierra plana. Encima de esta h-Tierra, en un plano hiperbólico infinito, viven los *hiperbolianos*. La gravedad es perpendicular a la Tierra. Un objeto que se suelta arriba de la h-Tierra cae a lo largo de una h-recta que es perpendicular a la superficie de la h-Tierra. La Figura 6 muestra una sección de la h-Tierra con las h-líneas del campo gravitacional.

Los siguientes cuestionamientos pueden parecer un juego, pero en el fondo reflejan de manera contundente lo diferente que es la geometría hiperbólica de la geometría euclidiana.

Empezamos con una pregunta en la cual la gravedad todavía no interviene: ¿Qué experimenta una madre que camina con sus hijos, si ella camina sobre una h-recta con un hijo de cada lado tomado de la mano? Como los brazos de la madre y de los hijos no se estiran, cada hijo camina siempre a la misma distancia de la madre. Por ello, los hijos caminan sobre equidistantes.

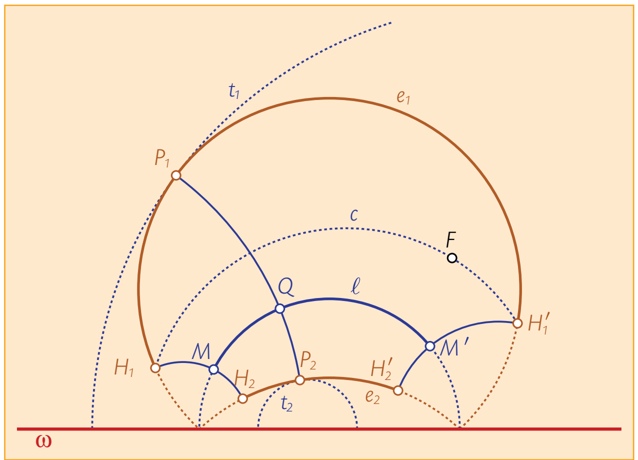

Figura 7. Paseo por **h**-equidistantes.

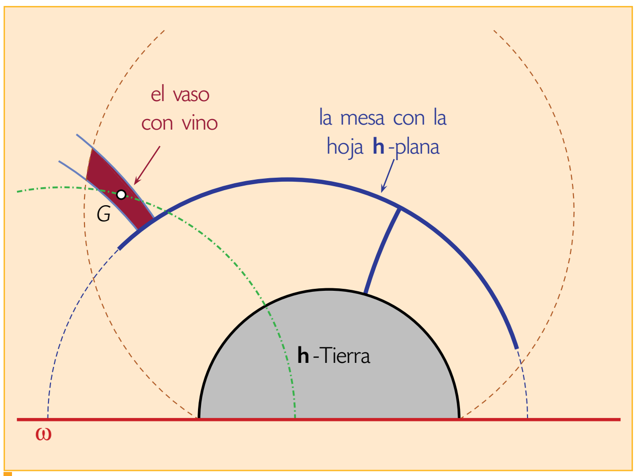

Figura 8. Mesa **h**-plana.

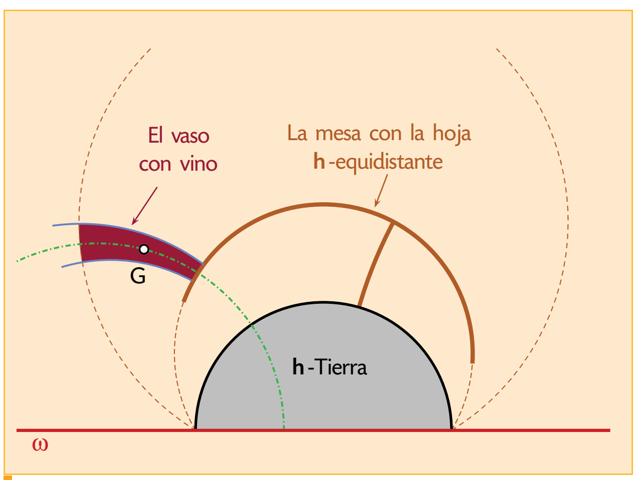

Figura 9. Mesa con superficie equidistante.

Ellos tienen que caminar sobre una curva. La Figura 7 muestra una posible situación: la madre camina de M a M' sobre la recta l. El hijo del lado izquierdo camina de H_1 a H'_1 sobre la equidistante e_1, el hijo del lado derecho camina de H_2 a H'_2 sobre la equidistante e_2.

Si en cierto momento la madre –digamos que cuando está en el punto Q– soltara a sus hijos y éstos siguieran caminando sobre rectas en la dirección que en ese momento tienen, entonces seguirían las **h**-rectas tangentes t_1 y t_2, respectivamente. De ahí vemos que el hijo del lado izquierdo siempre tiene que caminar hacia la derecha, hacia su madre. De hecho, el hijo camina mucho más: el camino más corto de H_1 a H'_1 –el punto de partida y el destino de su caminata– es el **h**-segmento c. A lo largo de c se acerca a la madre en medio, dado que ahí se encuentra más cerca que la equidistante. Caminando sobre c llegaría apenas hasta el punto F si caminara la misma distancia que su madre. Por ello, en Hiperbolia se recomienda que los hijos sigan a su madre en fila india y no caminen a los lados.

Veamos ahora un problema de geometría tridimensional en donde sí interviene la gravedad: nos preguntamos cómo habrá que construir una mesa en Hiperbolia. Por nuestra experiencia del mundo euclidiano, podríamos esperar que lo más natural es que la mesa tenga una superficie plana.

En la Figura 8 se muestra un corte transversal de una mesa con un soporte central y superficie plana. Del lado izquierdo hay un vaso de vino sobre la superficie de la mesa. Se observa que la superficie del vino parece estar chueca, pero en realidad está equilibrada respecto a la superficie de la Tierra, pues dado que el campo gravitacional es perpendicular a la **h**-Tierra, también es perpendicular a todas las equidistantes a la superficie de la **h**-Tierra. La figura también muestra la línea de gravedad que pasa por el baricentro del vaso.

Como esta línea no pasa por el área de apoyo del vaso, éste se caerá y el vino se derramará hacia el centro de la mesa, donde formará un charco. Por ello, resulta mejor planear las mesas equidistantes al piso, tal como muestra la Figura 9. En una mesa equidistante los vasos se paran bien y no se caen; en cambio, no se pueden usar manteles, ya que se arrugarán.

El último problema que consideraremos es el de construir un rascacielos. Para que las paredes se sostengan, se deben edificar de manera vertical. Para poder colocar libreros en las paredes, los entrepaños tendrán que ser equidistantes al piso. La Figura 10 muestra la edificación.

Conforme uno sube de piso en piso, la superficie de la habitación aumenta. En el piso superior se esbozaron tres habitantes hiperbolianos del mismo tamaño, uno de cada lado de la habitación y uno en el centro. Se dibujó también una línea de visión desde el ojo del hiperboliano izquierdo y se marcó con gris el espacio de la habitación que éste no alcanza a ver porque el piso se interpone (en Hiperbolia la luz viaja en h-rectas). Para el hiperboliano izquierdo, su habitación se levanta en medio, a tal grado que no alcanza a ver a su compatriota del lado derecho.

También recordamos que para cada piso hay que comprar una mesa cuya superficie sea equidistante a la h-Tierra; es decir, para cada piso se requiere una mesa distinta, por lo que se recomienda que en las tiendas y carpinterías se ordenen las mesas según el piso en el cual se usarán. Así como no sirven los manteles, tampoco se pueden poner alfombras.

El problema de la escala

Supongamos que somos hiperbolianos y nos llama por teléfono un extraterrestre euclidiano, al que queremos comunicarle cómo es nuestro mundo, nuestra casa, la mesa, etcétera.

Primero podríamos explicarle qué unidad de medida usamos. No necesitamos explicar lo que es un metro, sino dar referencias importantes, como decirle: "yo mido un metro con 80 centímetros", "mi habitación tiene una altura de dos metros con 50 centímetros", etcétera. El extraterrestre podrá inferir lo que para él es un "metro extraterrestre" dividiendo su estatura entre 1.8. Después podrá tratar de elaborar una reproducción de nuestra casa a su escala. No importa si tiene, comparado con nosotros, el tamaño de un elefante o de un ratón; su casa será respecto a él como la nuestra es respecto a nosotros. Esto lo conocemos como *semejanza* en la geometría euclidiana.

Pero en la geometría hiperbólica esto no funciona, pues la suma de los tres ángulos de un triángulo es siempre menor que 180°. Dos triángulos que tienen los mismos ángulos son congruentes, es decir, uno es una copia del otro, pero en diferentes lugares del plano. Por ejemplo, existe un único triángulo con los ángulos 90°, 45° y 36°. La Figura 11 muestra este triángulo en verde. El ángulo de 36° se encuentra en la esquina *S*, el de 90° en *T* y el de 45° en *A*. Si reflejamos el triángulo con respecto a *ST*, obtenemos el triángulo *EAS*, que tiene un ángulo de 72° en *S*. Dado que 72° es un quinto de 360°, podemos formar un pentágono *ABCDE* con cinco copias del triángulo *EAS*. Es un pentágono que tiene cinco ángulos de 90°.

Ahora bien, este pentágono tiene un tamaño fijo en Hiperbolia. Dependiendo del tamaño que tengamos al entrar a Hiperbolia, este pentágono podría tener el tamaño de una cuadra con 100 metros de cada lado o

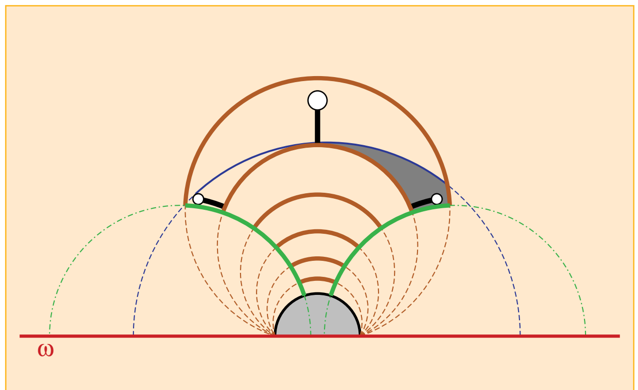

Figura 10. h-rascacielos.

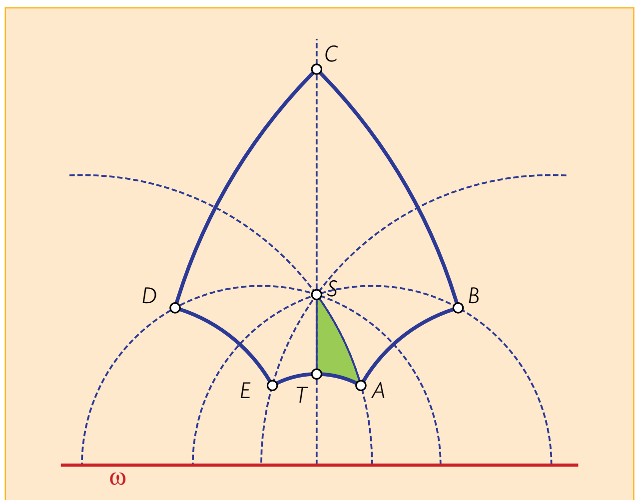

Figura 11. h-pentágono.

Figura 12. Paisaje h-urbano.

Figura 13. h-edificios.

el de un azulejo con 20 centímetros de lado. Los dos mundos serán muy diferentes.

Que nosotros conozcamos la semejanza en nuestro mundo no garantiza que nuestro mundo sea euclidiano: bien podría ser hiperbólico (a gran escala) si entramos del tamaño de una galaxia o de algo muchas veces mayor. Por ello, la escala sí importa.

El programa *Hiperbolia*

Para hacer más accesible la geometría hiperbólica, el Instituto de Matemáticas, en colaboración con la Dirección General de Cómputo y de Tecnologías, de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), trabajó en un proyecto de visualización tridimensional que se puede explorar de manera interactiva en tiempo real. El programa de visualización se llama *Hiperbolia*. Las Figuras 12 y 13 se crearon con este programa y muestran diferentes ciudades que se planearon y edificaron de manera virtual en *Hiperbolia*.

La Figura 12 muestra la primera ciudad que se construyó. En la parte superior derecha se ve un mapa que muestra la ubicación de los edificios en un dibujo, que es el *modelo de Klein*. Se aprecia claramente que el hiperboliano puede ver toda una recta con los dos extremos sin tener que voltear la cabeza. Se observa también que los bordes de las calles no son rectos, sino equidistantes al centro de la calle. Todos los postes con las luminarias también tienen la misma altura, por ello se ve como curva respecto al piso. La Figura 13 muestra una edificación más reciente. En ella, las calles se intersecan en ángulos rectos y se forman manzanas hexagonales.

Michael Barot hizo sus estudios básicos en Schaffhausen, Suiza, su pueblo natal. La licenciatura y la maestría en matemáticas (y física) las hizo en la Universidad de Zürich y el doctorado en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Es investigador titular del Instituto de Matemáticas de la UNAM, actualmente con licencia para llevar a cabo labores docentes en el bachillerato en Suiza. Ha publicado cerca de 25 artículos en revistas de alto impacto sobre su trabajo de investigación en el área de la teoría de representaciones de álgebras. Ha impartido cursos desde el bachillerato hasta el posgrado y ha dirigido tres tesis de licenciatura, cinco de maestría y una de doctorado en matemáticas, así como dos tesis de maestría en docencia. Fue coordinador de la serie de videos *Aventuras matemáticas*, que divulga de manera amena diversos temas de esta disciplina. Ha sido coorganizador de los dos Festivales Matemáticos 2010 y 2012 en Coyoacán. Es Investigador Nacional y miembro de la Academia Mexicana de Ciencias.
barot@matem.unam.mx