José de Jesús Medel Juárez y Consuelo Varinia García Mendoza

Historia del DETERMINANTE

En el área de las matemáticas, y otras afines, el determinante tiene un sinfín de aplicaciones; gracias a su versatilidad se puede conocer la relación de los estados de cualquier sistema. En esta reseña se presenta el desarrollo de la teoría de los determinantes, resultado del trabajo y las contribuciones de muchos científicos desde el siglo III antes de nuestra era.

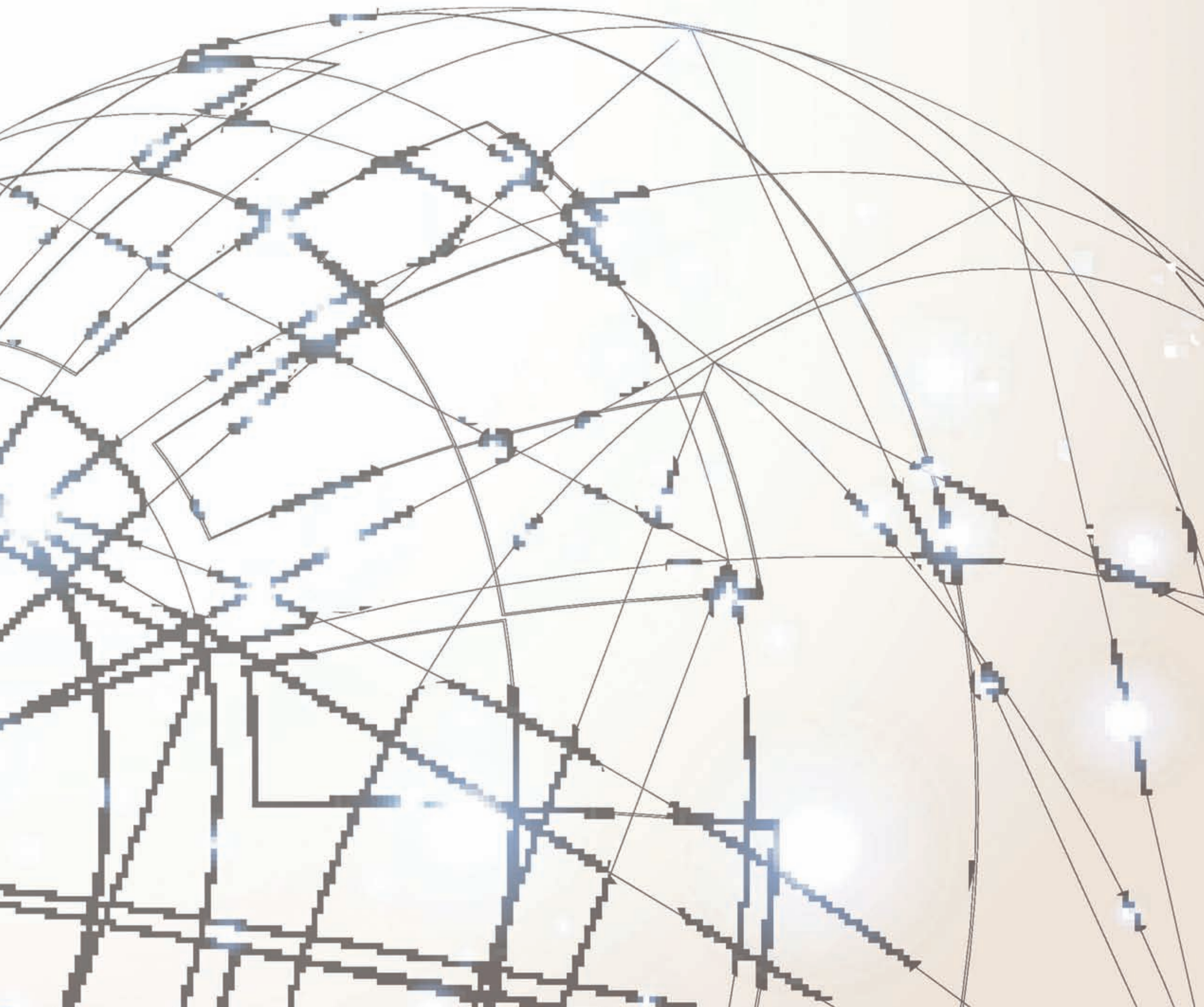
El determinante es un funcional (una función de funciones) en donde se relacionan los renglones y las columnas de una matriz de orden $n \times n, n \in \mathbb{Z}_+$, a través de sumatorias con respecto a sus menores principales.

El determinante tiene un sinfín de aplicaciones; por ejemplo, el control en la estimación de parámetros en sistemas tipo caja negra, que requiere para ello de la inversa o de la pseudoinversa. En economía, se utiliza para encontrar los puntos de equilibrio de un sistema financiero descrito matricialmente (Figura 1); en ingeniería, para optimizar procesos; en geometría computacional, para el cálculo de cascos convexos y diagramas de Voronoi (Figura 2). Y en general, en matemáticas se utiliza para saber si un sistema de ecuaciones tiene solución, en el cálculo de áreas y volúmenes (Figura 3), así como en la formulación de ecuaciones de objetos geométricos como rectas, círculos, elipses, parábolas, planos, esferas, etcétera.

La versatilidad de la teoría alrededor del determinante y sus múltiples aplicaciones nos permiten conocer la relación de los estados de cualquier sistema. Esta teoría es resultado del trabajo de muchos científicos desde el siglo III antes de nuestra era.

Aportaciones en Asia

La primera cultura de la que se tiene registro que incursionó en el planteamiento de sistemas de ecuaciones y su solución fue la china, ya que en ella se



desarrolló el interés por describir y resolver sistemas de ecuaciones relacionadas con la obtención de cuadrados mágicos. De ello dejaron registro en cañas de bambú encontradas en diferentes lugares con una tabla de cálculo con los coeficientes de las incógnitas de un sistema de ecuaciones lineales; restando filas y columnas, desarrollaron así una forma sencilla de resolver un sistema de ecuaciones. Otra evidencia de la incursión de dicha cultura en este tema se encuentra en el último problema del octavo capítulo del libro *Jiuzhang Suanshu* (*Nueve capítulos del arte matemática*) (Figura 4), escrito en el siglo III a. n. e., donde se plantea la resolución de un sistema de cuatro ecuaciones con cinco incógnitas.

La segunda cultura que abordó este tema fue la japonesa. Al matemático y samurái Seki Kowa (1642-1708) se le da el crédito por la invención de los determinantes. Seki emprendió estudios sobre la teoría de las ecuaciones según los métodos de los matemáticos chinos. En 1683 introdujo el tema de los determinantes en el *Kai Fukundai no Ho* (*Método de solución de problemas Fukundai*). Con el proceso llamado *tatmu*, derivó las ecuaciones lineales de dos ecuaciones cuadráticas y encontró su determinante. También simplificó determinantes de grado mayor a 2 al identificar el factor co-

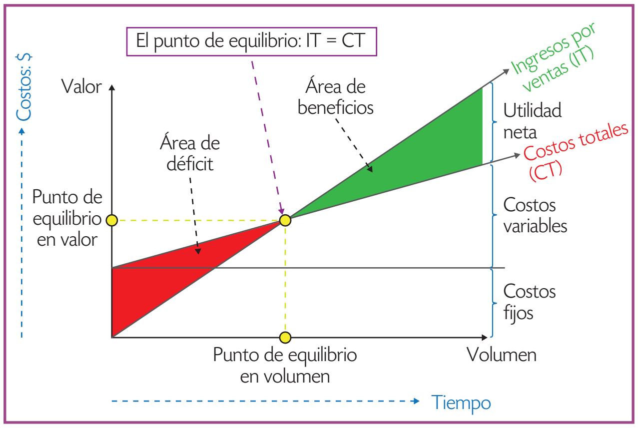


Figura 1. Puntos de equilibrio.

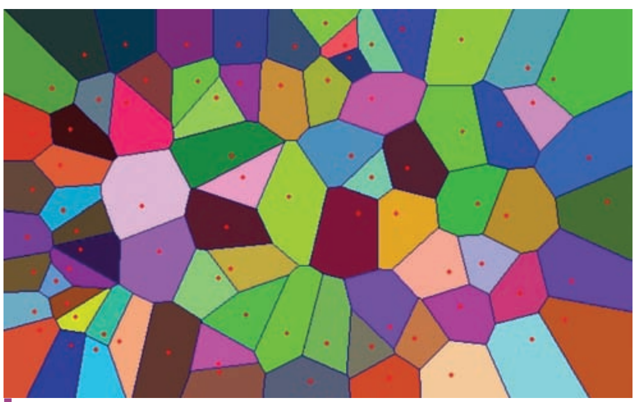


Figura 2. Diagramas de Voronoi.

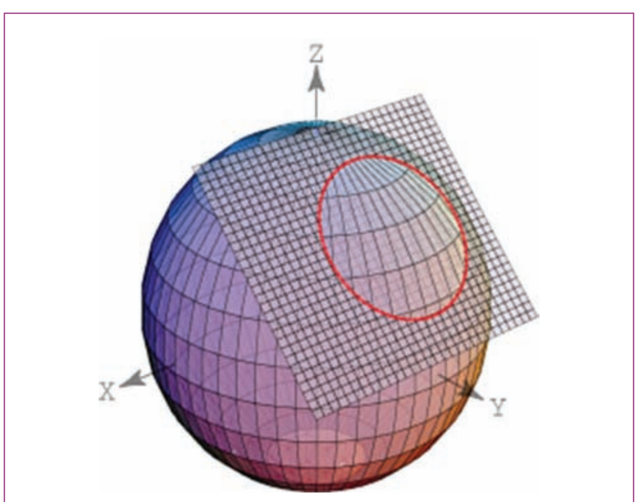
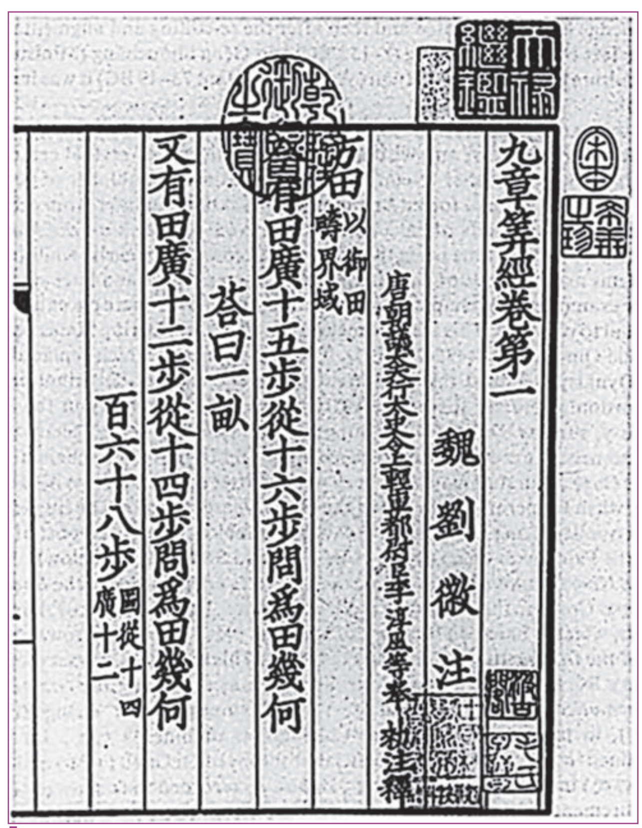


Figura 3. Volumen de una esfera.



九章算經卷第一
魏 劉徽 注
唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉敕注釋
方田 以御田疇界域
今有田廣十五步從十六步問爲田幾何
荅曰一畝
又有田廣十二步從十四步問爲田幾何
荅曰一百六十八步 圖 從十四 廣十二

Figura 4. Una página de *Nueve capítulos del arte matemática.*

mún de una determinada fila. Seki formuló el concepto de *determinante* y estableció muchas de sus propiedades, así como la forma de describir qué términos son positivos y cuáles son negativos en la expansión a través de sus menores principales.

Aportaciones en Europa

En Europa, los determinantes aparecieron en la literatura matemática más de un siglo antes que las matrices. El término *matriz* fue usado por primera vez por James Joseph Sylvester (1814-1897).

El 28 de abril de 1693, el diplomático y filósofo alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) escribió una carta a Guillaume François Antoine (1661-1704), marqués de l'Hôpital, en la que resolvía el sistema de ecuaciones (1), (2) y (3).

$$10 + 11x + 12y = 0 \qquad (1)$$
$$20 + 21x + 22y = 0 \qquad (2)$$
$$30 + 31x + 32y = 0 \qquad (3)$$

Describió la disposición de los coeficientes de (1), (2) y (3) con números con subíndices. El número indica la ecuación a la que pertenece y el subíndice señala el elemento dentro de la ecuación, como se observa en (4).

$$\begin{array}{ccc} 1_0 & 1_1 & 1_2 \\ 2_0 & 2_1 & 2_2 \\ 3_0 & 3_1 & 3_2 \end{array} \qquad (4)$$

Esto corresponde término a término entre (1), (2), (3) a (4), como se observa en (5).

$$\begin{array}{l} 1_0 = 10,\ 1_1 = 11,\ 1_2 = 12; \\ 2_0 = 20,\ 2_1 = 21,\ 2_2 = 22; \\ 3_0 = 30,\ 3_1 = 31,\ 3_2 = 32. \end{array} \qquad (5)$$

Para explicar lo que hizo Leibniz, en (6) se desarrolla de manera ampliada.

$$\begin{array}{ccccc} 1_0 & 1_1 & 1_2 & 1_0 & 1_1 \\ 2_0 & 2_1 & 2_2 & 2_0 & 2_1 \\ 3_0 & 3_1 & 3_2 & 3_0 & 3_1 \end{array} \qquad (6)$$

El producto en (6) se describe a continuación:

$$1_0 * 2_1 * 3_2 + 1_1 * 2_2 * 3_0 + 1_2 * 2_0 * 3_1 -$$
$$3_0 * 2_1 * 1_2 - 3_1 * 2_2 * 1_0 - 3_2 * 2_0 * 1_1.$$

Y corresponden (7) a (6) con respecto a las ecuaciones (1), (2) y (3).

$$\begin{array}{l} 10 * 21 * 32 + 11 * 22 * 30 + 12 * 20 * 31 - \\ 30 * 21 * 12 - 31 * 22 * 10 - 32 * 20 * 11 = 0. \end{array} \qquad (7)$$

Leibniz identificó que los productos señalados con las flechas hacia abajo (color azul) eran equivalentes a los productos de las flechas hacia arriba (color rojo). Concluyó que existen una x y una y que satisfacen a (1), (2) y (3), con lo que proporcionó la noción de la descripción del determinante por permutaciones que actualmente se utiliza.

En 1748, dos años después de la muerte del matemático británico Colin Maclaurin (1698-1746), se publicó su tratado de álgebra, donde exponía la resolución de sistemas de dos y tres ecuaciones con el mismo número de incógnitas; así llegó a lo que hoy conocemos como el determinante de segundo y tercer grado.

Por su parte, el matemático suizo Gabriel Cramer (1704-1752) publicó en 1750 el tratado de geometría *Introducción al análisis de las líneas curvas algebraicas* (Figura 5), donde proponía la solución de sistemas de ecuaciones lineales con el mismo número de incógnitas y ecuaciones. El método es similar al publicado en el tratado de álgebra de Maclaurin, pero es más conocido por su claridad de notación y generalización.

Cramer desarrolló la notación de ecuaciones lineales de acuerdo con (8), donde se representan los coeficientes como letras con superíndices y donde las letras mayúsculas indican la columna y el superíndice, el renglón.

$$\begin{array}{l} A^1 = Z^1 z + Y^1 y + X^1 x + V^1 v + \ldots \\ A^2 = Z^2 z + Y^2 y + X^2 x + V^2 v + \ldots \\ A^3 = Z^3 z + Y^3 y + X^3 x + V^3 v + \ldots \end{array} \qquad (8)$$

Utilizando esta notación, propuso la solución del sistema de ecuaciones (9) y (10) a través de (11) y (12); al igual que el de (13), (14) y (15) por medio de (16), (17) y (18).

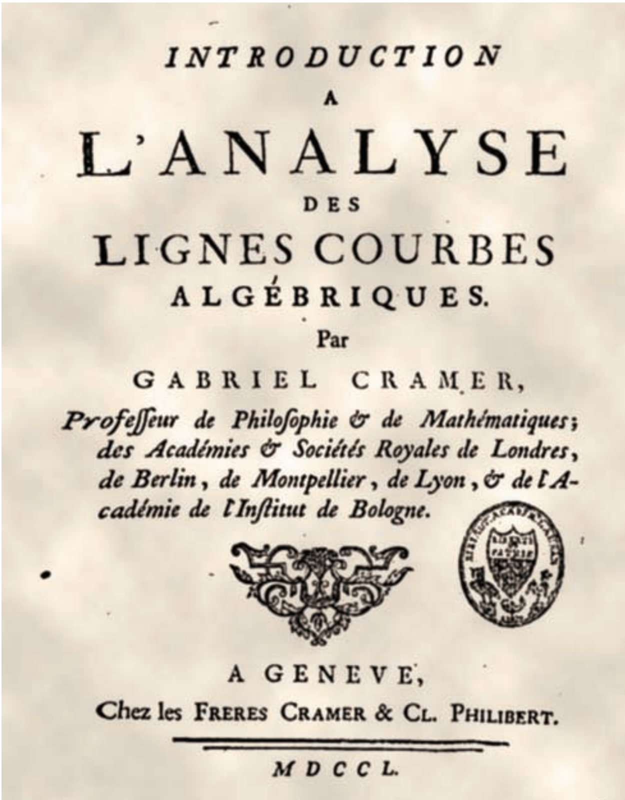

INTRODUCTION
A
L'ANALYSE
DES
LIGNES COURBES
ALGÉBRIQUES.
Par
GABRIEL CRAMER,
Profeſſeur de Philoſophie & de Mathématiques; des Académies & Sociétés Royales de Londres, de Berlin, de Montpellier, de Lyon, & de l'Académie de l'Inſtitut de Bologne.
A GENEVE,
Chez les FRERES CRAMER & CL. PHILIBERT.
MDCCL.

Figura 5. Tratado de geometría de Cramer (1750).

$$A^1 = Z^1 z + Y^1 y \tag{9}$$
$$A^2 = Z^2 z + Y^2 y \tag{10}$$

$$z = \frac{A^1Y^2 - A^2Y^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1} \tag{11}$$

$$y = \frac{Z^1A^2 - Z^2A^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1} \tag{12}$$

$$A^1 = Z^1 z + Y^1 y + X^1 x \tag{13}$$
$$A^2 = Z^2 z + Y^2 y + X^2 x \tag{14}$$
$$A^3 = Z^3 z + Y^3 y + X^3 x \tag{15}$$

$$z = \frac{A^1Y^2X^3 - A^1Y^3X^2 - A^2Y^1X^3 + A^3Y^1X^2 + A^2Y^3X^1 - A^3Y^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1} \tag{16}$$

$$y = \frac{Z^1A^2X^3 - Z^1A^3X^2 - Z^2A^1X^3 + Z^3A^1X^2 + Z^2A^3X^1 - Z^3A^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1} \tag{17}$$

$$x = \frac{Z^1Y^2A^3 - Z^1Y^3A^2 - Z^2Y^1A^3 + Z^3Y^1A^2 + Z^2Y^3A^1 - Z^3Y^2A^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1} \tag{18}$$

De esta forma se resuelve un sistema de ecuaciones lineales con el mismo número de incógnitas y ecuaciones.

En 1771 Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796) realizó la primera exposición lógica y formal de la teoría de los determinantes, reconociéndolos como funciones independientes. Describió la matriz –que ahora lleva su nombre– como la matriz cuadrada (19).

$$V_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_1^0 & a_2^0 & a_3^0 & a_4^0 & \cdots & a_n^0 \\ a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & \cdots & a_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & a_4^n & \cdots & a_n^n \end{bmatrix} \tag{19}$$

Los elementos de la matriz (19) son descritos de la forma $a_{columna}^{renglón}$; es decir, se utilizan los subíndices y superíndices para indicar la disposición de cada elemento en la matriz $V_{n\times n}$. De tal forma, el determinante de la matriz (19) es descrito en (20).

$$\prod_{\substack{i=1 \\ j>i}}^{n-1} \left(a_j - a_i\right) \tag{20}$$

Para clarificar este método, daremos un ejemplo. Supongamos que se quiere encontrar el determinante de la matriz descrita en (21).

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{bmatrix} \tag{21}$$

De acuerdo con lo que escribió Vandermonde, el determinante en (21) es descrito por el producto de los binomios en (22), donde se cumple que $i = \overline{1, (n-1)}$ sea para $j > 1$ y $j \uparrow n \in \mathbb{Z}_+$, de acuerdo con (20).

$$|A| = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2) \qquad (22)$$

Al desarrollar (22), se tiene (23), que equivale a calcular el determinante por sus menores.

$$|A| = a_3^2 a_2^1 - a_2^2 a_3^1 - a_3^2 a_1^1 + a_1^2 a_3^1 + a_2^2 a_1^1 - a_1^2 a_2^1 \qquad (23)$$

Ahora para la matriz $|A|_{2\times 2}$:

$$|A|_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a_1^0 & a_2^0 \\ a_1^1 & a_2^1 \end{bmatrix}$$

Su menor, que en este caso corresponde al determinante de la matriz $A_{2\times 2}$, está descrito en (24).

$$|A| = (a_1 - a_2)(a_1 - a_0) \qquad (24)$$

Al desarrollar, el producto de (24) corresponde a (25).

$$|A| = a_1^0 a_2^1 - a_1^1 a_2^0 \qquad (25)$$

En el caso del sistema (1), (2) y (3), éste corresponde al sistema (26).

$$\begin{bmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 20 & 21 & 22 \\ 30 & 31 & 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (26)$$

Si consideramos que:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 20 & 21 & 22 \\ 30 & 31 & 32 \end{bmatrix}$$

y su determinante descrito con (23), se tiene (27).

$$\begin{aligned} |A| = (32)(21) - (22)(31) - (20)(32) + \\ (22)(31) + (31)(20) - (20)(31) \end{aligned} \qquad (27)$$

El resultado de (27) es $|A| = 0$.

En 1772 Pierre-Simon Laplace (1749-1827) generalizó el método de Vandermonde para el desarrollo de los determinantes en productos de menores, y presentó el método general de la expansión de un determinante en términos de sus menores complementarios.

Al año siguiente Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813) expuso la solución de determinantes de segundo y tercer orden y los utilizó para fines distintos al de la solución de ecuaciones simultáneas.

En 1801 Carl Friedrich Gauss (1777-1855) utilizó la palabra *determinante* en su teoría de números. Se refirió al *discriminante cuántico*, con lo que se acercó al teorema de multiplicación de determinantes. Para 1812, Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856) presentó en la Academia de Ciencias de Francia un artículo con el teorema de la multiplicación de determinantes. El mismo día, el también matemático francés Agustin Louis Cauchy (1789-1857) publicó en la misma academia un artículo sobre el mismo teorema. Utilizaba la palabra *determinante* de Gauss en su sentido actual, con lo que mejoró la notación, y presentó una prueba más satisfactoria que la de Binet.

En 1815 Cauchy publicó una memoria en la que mejoraba el desarrollo de Laplace; en ella proporcionaba la primera exposición sistemática de los determinantes mediante la disposición de los elementos en filas y columnas y la notación de los índices dobles a_i^j, así como con el término *ecuación característica* para $p(\lambda) = 0$, donde p representa un polinomio característico matricial. En esa memoria se encuentran numerosos teoremas generales, como el de la multiplicación de los determinantes descrito en (28).

$$|a_i^j| \cdot |b_i^j| = |c_i^j| \qquad (28)$$

donde $|a_i^j|$ y $|b_i^j|$ son determinantes de orden n y

$$c_i^j = \sum_k a_i^k b_k^j.$$

El término de fila i y columna j del producto es la suma de los productos de los elementos correspondientes de la fila i de $|a_i^j|$ y de la columna j de $|b_i^j|$. Así, Cauchy mejoró el desarrollo de Laplace de los determinantes.

En 1829 el matemático alemán Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851) utilizó por primera vez los determinantes funcionales, que más tarde fueron llamados *jacobianos* por Sylvester en sus memorias del *Journal*

Crelle en 1841. Sylvester también contribuyó al estudio de los determinantes de una manera continua durante más de 50 años. Una de sus aportaciones principales a esta teoría consiste en un método más eficaz para eliminar la incógnita de dos ecuaciones polinómicas de grados n y m.

Veamos ahora el sistema descrito en (29), (30) y (31).

$$4x + 7y + 3z = -6 \qquad (29)$$

$$7x + 3y + 6z = 0 \qquad (30)$$

$$x + 5y + 9z = -1 \qquad (31)$$

Éste se ve en forma matricial en (32).

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad (32)$$

Lo que se puede ver simbólicamente en (33).

$$[A]_{r=3 \times c=3} [C]_{r=3 \times c=1} = [B]_{r=3 \times c=1} \qquad (33)$$

En (33) r indica el número de renglón; y c, el número de columna de cada matriz.

El sistema (29), (30) y (31), representado matricialmente en (32), tiene solución si el determinante de [A] es diferente de 0 (se escribe simbólicamente como *det*[A]≠0), ya que la inversa de [A] para encontrar al vector [X] está definida por el cociente de la adjunta de [A] (que simbólicamente es *Adj*[A]) con respecto al determinante de [A]; es decir, $\frac{Adj[A]}{det[A]}$, en donde la matriz adjunta está definida por la matriz transpuesta de la matriz de cofactores ($Adj[A]=(Cof[A])^T$) y la matriz de cofactores *Cof*[A] se construye a través de los determinantes de los menores de [A]. Cada menor de la matriz [A] se describe en (34); se indica con r al renglón y con c a la columna, en ambos casos, tomando en cuenta la ubicación del menor considerado.

De donde (34) se reduce a la forma (35).

$$\begin{bmatrix} [(-1)^2](-3) & [(-1)^3](57) & [(-1)^4](32) \\ [(-1)^3](48) & [(-1)^4](33) & [(-1)^5](13) \\ [(-1)^4](54) & [(-1)^5](3) & [(-1)^6](-37) \end{bmatrix} \qquad (35)$$

Y la matriz de cofactores (35) se reduce aún más considerando los signos con sus exponentes, como se observa en (36).

$$Cof[A] = \begin{bmatrix} -3 & -57 & 32 \\ -48 & 33 & -13 \\ 54 & -3 & -37 \end{bmatrix} \qquad (36)$$

Ahora la matriz adjunta es la transpuesta de la matriz de cofactores, como se observa en (37).

$$Adj[A] = \begin{bmatrix} -3 & -48 & 54 \\ -57 & 33 & -3 \\ 32 & -13 & -37 \end{bmatrix} \qquad (37)$$

De acuerdo con (32), el determinante de A se describe por los menores principales y sus coeficientes, en (38).

$$\begin{aligned} det(A) = {} & [(-1)^{r=1+c=1}] * 4 * det \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} + \\ & [(-1)^{r=1+c=2}] * 7 * det \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} + \\ & [(-1)^{r=1+c=3}] * 3 * det \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (38)$$

Esto da como resultado –315 unidades. Al realizar la división de (37) con respecto a (38), se tiene la inversa de la matriz [A] en (39).

$$Inv[A]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0.0095 & 0.1524 & -0.1714 \\ 0.1810 & -0.1048 & 0.0095 \\ -0.1016 & 0.0413 & 0.1175 \end{bmatrix} \qquad (39)$$

$$\begin{bmatrix} [(-1)^{r=1+c=1}]\det \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} & [(-1)^{r=1+c=2}]\det \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} & [(-1)^{r=1+c=3}]\det \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \\ [(-1)^{r=2+c=1}]\det \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} & [(-1)^{r=2+c=2}]\det \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} & [(-1)^{r=2+c=3}]\det \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \\ [(-1)^{r=3+c=1}]\det \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} & [(-1)^{r=3+c=2}]\det \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} & [(-1)^{r=3+c=3}]\det \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \qquad (34)$$

Y al multiplicar a (39) por el vector

$$[b]_{3\times1} = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

se tiene la solución del sistema planteado en (32), en donde $[X]_{3\times1} = inv[A]_{3\times3}[b]_{3\times1}$, y da como resultado el descrito en (40).

$$\begin{bmatrix} x^3 \\ x^2 \\ x \end{bmatrix}_{3\times1} = \begin{bmatrix} 0.1143 \\ -1.0952 \\ 0.7270 \end{bmatrix} \tag{40}$$

Sylvester encontró que si el determinante de (38) era nulo, era condición necesaria y suficiente para que el sistema de ecuaciones (29), (30) y (31), descrito en (32), matemáticamente tuviera una raíz en común.

Entre las aportaciones de Arthur Cayley (1821-1895), fundador de la teoría de las matrices, se encuentra la notación de matrices que actualmente utilizamos, la matriz nula y unitaria, y la inversa de una matriz. Con su trabajo enriqueció la teoría de los determinantes. Durante el último cuarto del siglo XIX, el matemático británico Charles Lutwidge Dogson (1832-1898) –mejor conocido por el seudónimo de Lewis Carroll– y algunos otros estudiosos, también enriquecieron la teoría de los determinantes con operaciones numéricas, así como con resultados nuevos y complementarios a los ya desarrollados por sus antecesores.

José de Jesús Medel Juárez es doctor en Ciencias en Control Automático, egresado del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN), unidad Distrito Federal. Es ingeniero aeronáutico por la Escuela Superior de Ingenieros Mecánicos y Eléctricos (ESIME-IPN), unidad Ticomán. Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores y de la Academia Mexicana de Ciencias. Ha sido reconocido por *Who's Who* en Ciencias y en Ingeniería. Actualmente tiene tres patentes de su autoría, otorgadas por el Instituto Mexicano de Propiedad Industrial; cuenta con una gran variedad de artículos de investigación incluidos en diversos índices; ha publicado libros, impartido conferencias y graduado a más de 35 alumnos, entre maestros y doctores. Es Profesor Investigador del IPN, adscrito al Centro de Investigación en Computación. Sus temas de investigación son el filtrado digital, el control automático, la lógica difusa y la integración entre ellas.
jjmedelj@yahoo.com.mx

Consuelo Varinia García Mendoza es ingeniera en sistemas computacionales por la Escuela Superior de Cómputo del Instituto Politécnico Nacional (IPN). Obtuvo su maestría y doctorado en Tecnología Avanzada por el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, unidad Legaria. Actualmente es profesora de la Escuela Superior de Cómputo del IPN. Su tema de investigación es el filtrado digital de señales y sistemas de información. Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores.
consuelo.varinia@gmail.com

Lecturas recomendadas

Cajori, F. (2007), *A History of Mathematical Notations*, Nueva York, Cosimo, pp. 87-105.

Collete, J. P. (1993), *Historia de las matemáticas*, vol. 2, Madrid, Siglo XXI Editores.

Cullen, Ch. (2007), "The Suàn shù sh, 'Writings on reckoning': Rewriting the history of early Chinese mathematics in the light of an excavated manuscript", *Historia Mathematica*, 34(1):10-44.

Pla I Carrera, J. (2009), *Liu Hui: Nueve capítulos de la matemática china*, Madrid, Nivola.

Weld, L. G. (1906), *Determinants*, Nueva York, John Wiley & Sons.