Gerónimo Uribe Bravo

La danza incesante de las MOLÉCULAS

Norbert Wiener fue el primer matemático que demostró la existencia de un modelo que cumple con las características estipuladas por Einstein en su célebre artículo sobre el movimiento de las partículas suspendidas en un líquido estacionario. A continuación se aborda la importancia del movimiento browniano para la ciencia y la matemática, así como la historia alrededor de la contribución de Wiener a esta teoría.

La materia… ¿es continua o discreta?

La disyuntiva sobre la estructura de la materia nos plantea la idea de si siempre podemos continuar subdividiéndola; esto es, si es en cierto sentido continua o si hay un límite para esta subdivisión, lo que implica una estructura discreta de la materia. Ya en tiempos de los antiguos griegos fue aventurada la idea de que la materia es discreta y se construye a partir de átomos, bloques fundamentales, como plantearan Leucipo y Demócrito, principalmente. El romano Lucrecio defiende la teoría atómica en su libro *De rerum natura* (*Sobre la naturaleza de las cosas*), en el que encontramos la siguiente descripción muy acertada y poética del movimiento (browniano) de las partículas de polvo, en la que apoya su prueba de la existencia de los átomos. Se basa en una experiencia muy común:

> Observe lo que sucede cuando los rayos de sol penetran en un edificio e iluminan sus zonas oscuras. Verá una multitud de pequeñas partículas danzando de muchas maneras. Su danza es una indicación de los movimientos subyacentes de la materia que escapan a nuestra vista. Se origina por los átomos que se mueven por sí mismos, espontáneamente.
>
> Entonces, esos pequeños cuerpos compuestos (como las partículas de polvo) se ponen en movimiento por el impacto de los golpes invisibles de los átomos, y a su vez impactan a cuerpos más grandes. Así, el movimiento se transmite a escalas más grandes y gradualmente emerge al nivel de nuestros sentidos. Esto causa el movimiento de las partículas que vemos en los rayos del sol, causado por golpeteos que permanecen invisibles.

Una versión moderna de la observación anterior ocurriría cuando vemos un rayo de luz emitido por un proyector, ya sea en el cine o en una conferencia. Sin embargo, muchas de las discusiones antiguas sobre la estructura de la materia se basaban más bien en este tipo de argumentos filosóficos y no tanto en la experimentación.

Más adelante, durante el siglo XIX, la hipótesis atomista fue considerada más sistemáticamente por los químicos, dado su interés por las sustancias y sus interacciones. Sus experimentos los llevaron, por ejemplo, a postular que las sustancias se componen por moléculas que están en movimiento incesante dentro de un fluido. Esta agitación explica por qué los fluidos tienden a llenar el recipiente o volumen que los contiene, propiedad conocida como expansibilidad.

Es al químico inglés John Dalton a quien debemos una formulación muy precisa de la hipótesis atomista: cada sustancia (elemental) está compuesta por una forma determinada de partículas rigurosamente idénticas, mismas que pasan por las diferentes transformaciones químicas sin subdividirse. Dalton fue conducido a la hipótesis atomista gracias a sus investigaciones acerca de la llamada ley de proporciones múltiples, que estipula que si cada dos sustancias elementales –más tarde llamadas simplemente elementos– se combinan para formar un compuesto, encontramos que en general la proporción entre las masas de los elementos se expresará casi siempre como cociente de dos enteros pequeños. Por ejemplo, el carbón y el oxígeno pueden reaccionar para formar monóxido o bióxido de carbono. En el primer caso, la proporción de masas es de 1 a 1, mientras que en el segundo caso es de 2 a 1. Sin embargo, para Dalton todavía no quedaba clara la distinción entre átomos y moléculas, lo que lo llevó a algunas conclusiones erróneas. Esta ley de proporciones múltiples ya era una indicación sobre

la estructura discreta de la materia, mas implica poder conocer los pesos de los átomos, en relación de los unos con los otros.

Para determinar los pesos atómicos faltaba, sin embargo, una pieza de información que permitiera conocer al menos uno de ellos, para así poder determinar el resto a partir de la ley de proporciones múltiples. Esta información se encontraría en otra rama de la ciencia: la física, específicamente en la teoría cinética de los gases. Ésta describe a los gases como una gran colección de partículas pequeñas que se encuentran en movimiento incesante. Una observación experimental es la de la hipótesis de Amedeo Avogadro: volúmenes iguales de gases diferentes –bajo las mismas condiciones de temperatura y presión– contienen igual número de moléculas. A esta cantidad se le conoce como número de Avogadro. Mas la pieza teórica clave para su determinación experimental es el movimiento browniano, y fue introducida por Albert Einstein.

A 1905 se le conoce como el "año milagroso" de Einstein, dado que publicó tres artículos fundamentales para la física. El primero de ellos trata sobre el movimiento browniano. Su título es "Sobre el movimiento de pequeñas partículas suspendidas en un líquido estacionario, como requiere la teoría cinética-molecular del calor", y el primer párrafo contiene la frase: "Es posible que los movimientos que se discutirán aquí sean idénticos al llamado movimiento browniano molecular; sin embargo, los datos a los que tengo acceso sobre éste son tan imprecisos que no me fue posible formarme un juicio al respecto."

¿Y qué es el movimiento browniano? En 1828 el botanista inglés Robert Brown publicó el artículo "Un breve reporte sobre observaciones microscópicas de partículas contenidas en el polen de las plantas". Al observar bajo el microscopio granos de polen suspendidos en agua, se dio cuenta de que presentaban un movimiento caótico e incesante sin una dirección determinada. El movimiento sería similar al de las partículas de polvo a las que apela Lucrecio. Al principio, Brown pensó que dicho movimiento podría ser una manifestación de la vida contenida en las partículas de polen, idea que rechazó al realizar experimentos con sustancias inorgánicas. De hecho, el fenómeno se presentaba en una gran cantidad de circunstancias y era una especie de molestia para los microscopistas, por lo que se difundió ampliamente el nombre de movimiento browniano aunque no hubiera explicaciones para él.

Einstein imaginó la siguiente consecuencia del modelo cinético de los gases. En un líquido se suspenden cuerpos de tamaño microscópicamente visible. Entonces, debido a los movimientos de las moléculas que conforman el líquido y que son más pequeñas, la partícula macroscópica observará un movimiento caótico, provocado por el golpeteo en todas direcciones de las moléculas. Einstein fue más allá para precisar el modelo probabilístico subyacente, al calcular la probabilidad de que la partícula macroscópica se encuentre hasta cierta posición en determinado tiempo. En la Figura 1 se esquematiza esta situación: se observan partículas grises que se mueven en todas direcciones –las posiciones anteriores se ilustran con la *cola* de las partículas pequeñas– y que impactan a una más grande.

Luego, mediante consideraciones físicas, relacionó los parámetros de su modelo con el número de Avogadro. Su artículo presenta una teoría física, la teoría cinética del calor, junto con un método para determinar

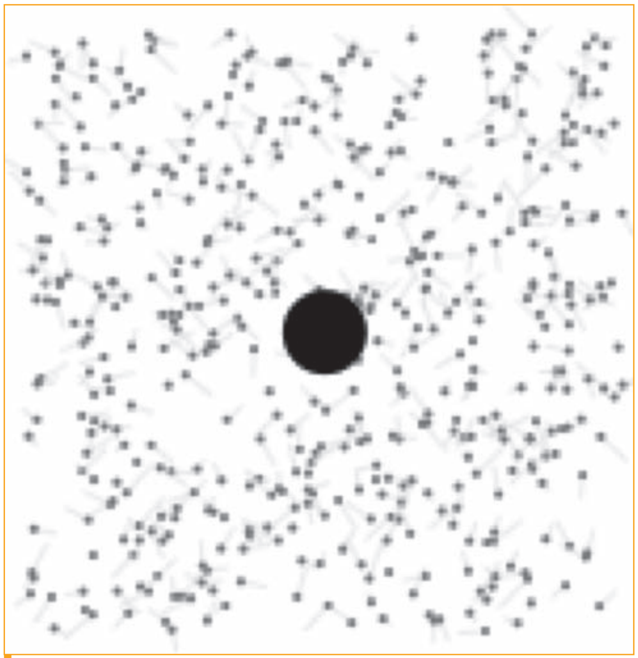

Figura 1. Esquematización de un gas conformado por partículas pequeñas (en gris). La estela color gris claro en cada partícula apunta hacia su posición una unidad de tiempo atrás. Hay una partícula mucho más grande (en negro) con la cual hay colisiones.

experimentalmente el número de Avogadro, lo cual daría sustento a las teorías atómicas de la materia.

La aportación de Einstein dio origen a una serie de experimentos que realizó Jean Perrin. Se dice que este trabajo resultó en la aceptación de la teoría atomista de la materia. Perrin ganó el Premio Nobel de Física en 1926, y el título de su conferencia fue "La estructura discontinua de la materia".

En la Figura 2 se reproduce uno de los resúmenes visuales que hace Perrin de sus experimentos, publicado en el artículo "El movimiento browniano y la realidad molecular". Se trata del registro de la posición de tres partículas coloidales con un radio de 0.53 micrómetros, vistas bajo un microscopio. De la figura, Perrin comenta: "Uno se da cuenta con tales ejemplos de qué tan cerca los matemáticos están de la verdad al rechazar, por instinto lógico, la admisión de las pretendidas demostraciones geométricas que se dan como evidencia empírica de la existencia de tangentes en cada punto de una curva."

Las figuras de Perrin muestran la posición de las partículas en dos dimensiones. Si sólo nos fijamos en el desplazamiento vertical, obtenemos el llamado movimiento browniano unidimensional, en el cual nos enfocaremos a continuación.

Pasemos ahora a la teoría matemática del movimiento browniano, pues ahí Norbert Wiener tuvo una contribución fundamental. Incidentalmente, la anterior frase de Perrin fue una motivación importante para el trabajo de Wiener, como lo comenta en la segunda parte de su autobiografía titulada *Soy un matemático*.

La teoría matemática del movimiento browniano

Como sabemos, el cálculo es una de las herramientas fundamentales de la matemática y tiene aplicaciones muy amplias en diversas disciplinas científicas. Fue desarrollado por Isaac Newton y Gottfried Leibniz a mediados del siglo XVII. En esta etapa inicial, los métodos dejaban ciertas imprecisiones que fueron resueltas durante un largo periodo de rigorización por matemáticos como Augustin Louis Cauchy, Karl Weierstrass y Bernhard Riemann.

Uno de los conceptos básicos en el cálculo es el de *derivada*, cuya interpretación geométrica es la de dar la pendiente de la recta tangente a una curva en un determinado punto.

Aunque fácilmente se pueden construir curvas que no admiten derivadas en algún punto (por ejemplo, poniendo una especie de esquina), para las aplicacio-

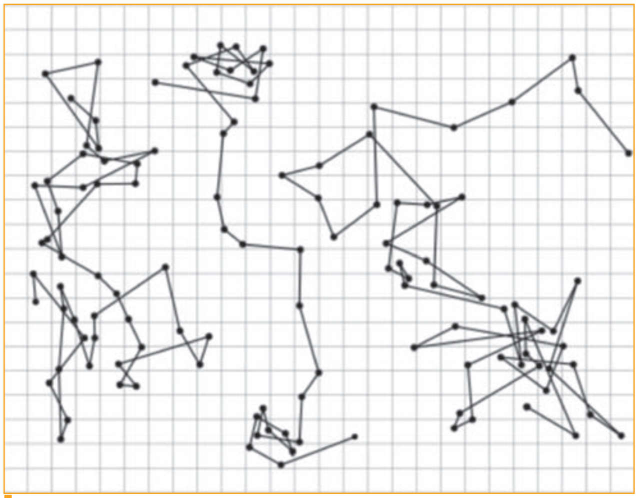

Figura 2. Registro de la posición de tres partículas coloidales con un radio de 0.53 micrómetros vistas bajo un microscopio. Original en *Les atomes*, de J. Perrin.

nes podía resultar natural argumentar que la curva con la que se estaba trabajando admitía una derivada. A este tipo de argumentaciones podría haberse referido Perrin con su expresión sobre "las supuestas demostraciones geométricas".

Durante el periodo de rigorización del cálculo se formalizaron las definiciones de *función* y *derivada*, y en particular fue una sorpresa absoluta la construcción –hecha por Weierstrass– de una curva que no admitía derivadas en ningún punto. Esta función se obtenía con un procedimiento límite que suma cada vez más y más funciones periódicas de tipo sinusoidal. Este tipo de límites fueron estudiados a profundidad a principios del siglo XIX y ahora los conocemos como ejemplos de series de Fourier, dentro de la disciplina del análisis de Fourier o análisis armónico. En la Figura 3 apreciamos cuatro etapas en la construcción de Weierstrass de su función sin derivadas.

Observemos cómo sucesivamente van apareciendo más puntos en los que la curva cambia abruptamente de ser descendente a ser ascendente. Matemáticamente, consideramos la serie

$$\frac{\mathrm{Cos}\,2x}{\sqrt{2}}+\frac{\mathrm{Cos}\,4x}{2}+\frac{\mathrm{Cos}\,8x}{2\sqrt{2}}+\frac{\mathrm{Cos}\,16x}{4}+\dots$$

y las gráficas se obtienen al considerar 2, 4, 6 y 11 términos.

El título de la segunda parte de la autobiografía de Norbert Wiener es muy claro: él se ve a sí mismo como un matemático, independientemente de su trabajo en otras áreas de la ciencia. Como él mismo dice, uno de sus primeros trabajos importantes dentro de la disciplina fue la construcción del movimiento browniano como objeto matemático. Esto es, describió al movimiento browniano como una función aleatoria. Técnicamente, su trabajo consistió en construir una teoría de integración en el espacio –infinito dimensional– de funciones continuas definidas en el intervalo [0,1] y con valores reales, y fue equivalente a la construcción de una medida de probabilidad en dicho espacio. Este trabajo lo publicó en 1923 con el título "Differential Space" y, como él mismo comenta, pasaron muchos años para que se reconociera su importancia. Cabe señalar que Wiener convierte la frase de Perrin en el siguiente resultado matemático: con probabilidad 1, el movimiento browniano no es diferenciable en ningún punto, tal como la función de Weierstrass.

Figura 3. Aproximaciones a una de las funciones sin derivadas de Weierstrass.

El trabajo "Differential Space" cobró importancia en el mismo periodo en que se desarrollaron otras construcciones del movimiento browniano, por parte de Andréi Kolmogórov en 1933, en su célebre tratado *Fundamentos de la teoría de la probabilidad*. Es importante enfatizar que el trabajo de Wiener precedió por diez años al de Kolmogórov, quien da una regla general –conocida como el teorema de consistencia de Kolmogórov– para construir medidas en espacios infinito dimensionales, así como un criterio –el llamado criterio de continuidad de Kolmogórov– para lograr que la medida se pueda construir en el mismo espacio que abordó Wiener. El trabajo de Kolmogórov coincidió con la publicación por Wiener de un tratado que tiene un lugar central en su obra –Análisis armónico generalizado, en colaboración con Raymond Paley– y en el que dio una segunda construcción mucho más sencilla del movimiento browniano. Así, a Wiener usualmente se le recuerda por describir al movimiento browniano como una serie de Fourier aleatoria, y su primera construcción de 1923 no es tan ampliamente utilizada. La construcción de Wiener tiene la forma

$$\sqrt{\frac{1}{\pi}}G_0 t+\sqrt{\frac{2}{\pi}}G_1\frac{\mathrm{Sin}\,1\cdot t}{1}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}G_1\frac{\mathrm{Sin}\,2\cdot t}{2}+$$
$$+\sqrt{\frac{2}{\pi}}G_1\frac{\mathrm{Sin}\,3\cdot t}{3}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}G_1\frac{\mathrm{Sin}\,4\cdot t}{4}+\dots$$

En 1939 Paul Lévy propuso una construcción mucho más simple que la de Wiener, y es la que encontramos en los libros de texto actuales, porque tiene propiedades adicionales. La construcción de Lévy es similar a la de Wiener, salvo que remplaza a las funcio-

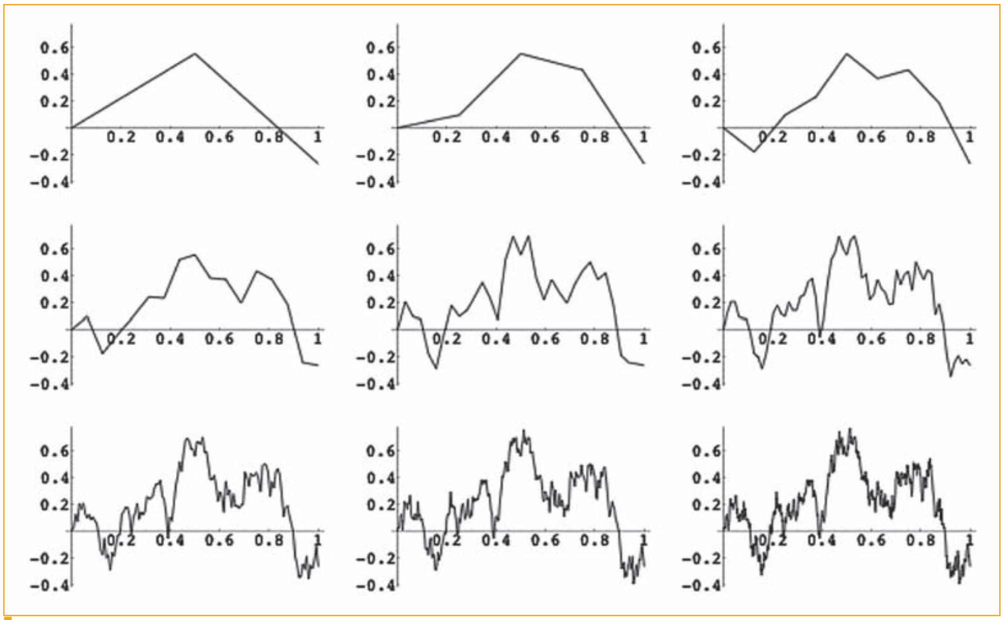

Figura 4. Aproximaciones al movimiento browniano mediante la construcción de P. Lévy.

nes sinusoidales por funciones tipo “tienda de campaña”, como en la Figura 4.

Como conclusión, cabe señalar que el movimiento browniano a veces se denomina *proceso de Wiener* y es una de las funciones aleatorias con mayor importancia dentro de la teoría de la probabilidad. Aún 90 años después de su construcción matemática, es un ejemplo vigente y sobre el cual existe una amplia investigación.

El autor agradece el apoyo económico de DGAPA-UNAM, a través del Proyecto PAPIIT IA101014 sobre Procesos Infinitamente Divisibles, para la realización de esta reseña.

Gerónimo Uribe Bravo estudió Actuaría en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), para continuar con estudios de doctorado en Ciencias Matemáticas en la misma institución. Su tesis fue galardonada con el Premio Weizmann 2009 a la mejor tesis doctoral en la categoría de ciencias exactas, otorgado por la Academia Mexicana de Ciencias. Realizó estancias posdoctorales en el Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas de la UNAM, y en la Universidad de California en Berkeley. Cuenta con una decena de artículos de investigación publicados en revistas de circulación internacional. Su interés principal está en la teoría de la probabilidad, particularmente en los procesos estocásticos como caminatas aleatorias, movimiento browniano, y otros procesos de Lévy, o procesos de ramificación.
geronimo@matem.unam.mx

Lecturas recomendadas

Bigg, C. (2008), “Evident atoms: visuality in Jean Perrin’s Brownian motion research”, *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, 39(3):312-322. (Un panorama de las estrategias empleadas por Perrin para tender un puente entre lo visible y lo invisible.)

Kahane, J. P. (1997), “A century of interplay between Taylor series, Fourier series and Brownian motion”, *Bulletin of the London Mathematical Society*, 29(3):257-279. (Un breve recorrido histórico enfocado en la matemática relevante para este artículo.)

Perrin, J. (1913), *Les atomes*, París, Librairie Félix Alcan. (Disponible a través del proyecto de digitalización Gallica. Describe los trabajos teóricos que llevaron a aceptar la hipótesis de discontinuidad de la materia.)

Wiener, N. (1956), *I Am a Mathematician*, Nueva York, Doubleday & Company. (Segunda parte de la autobiografía de Wiener en la que explora su etapa adulta y su carrera. Desde el primer capítulo habla sobre el movimiento browniano.)